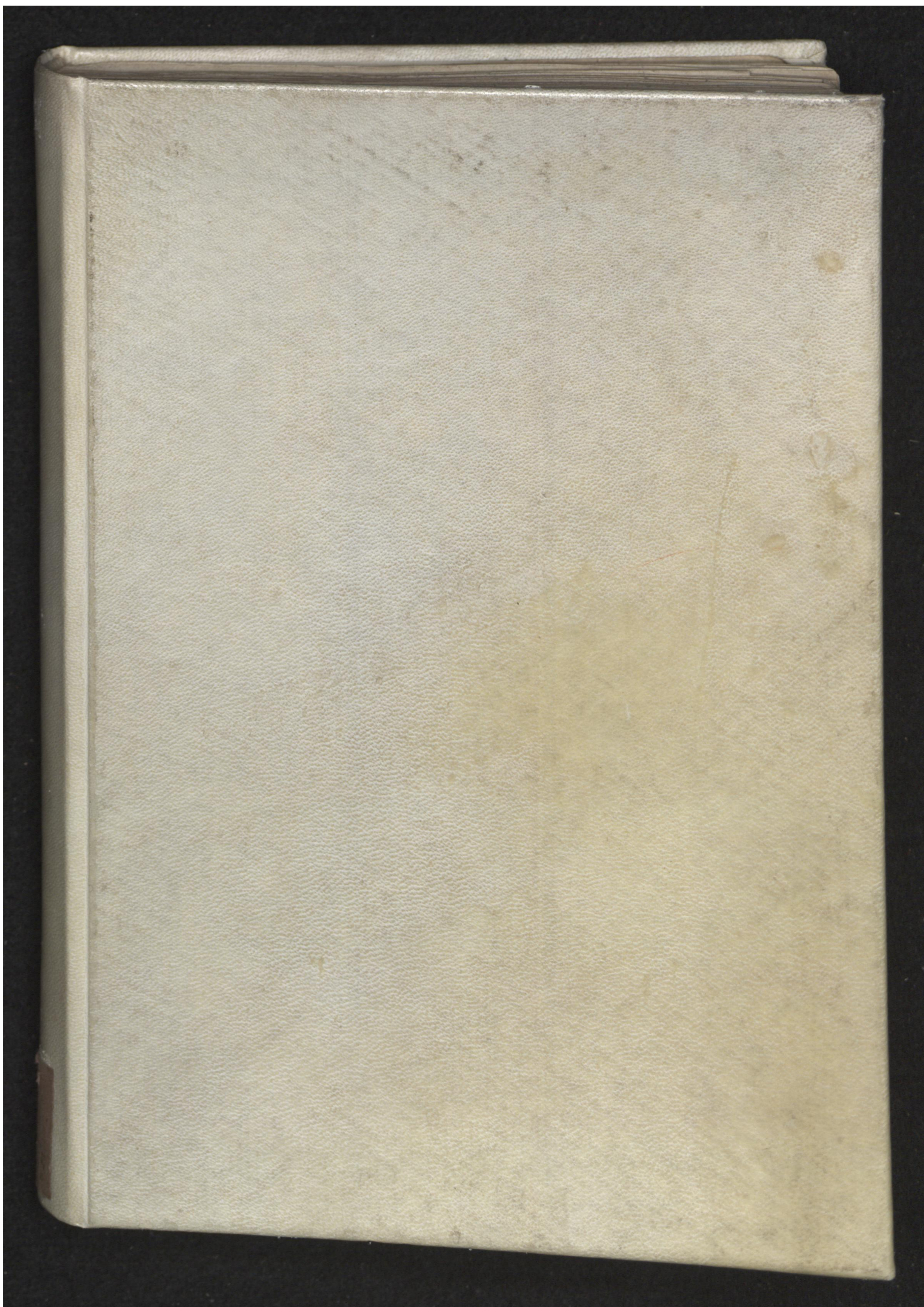
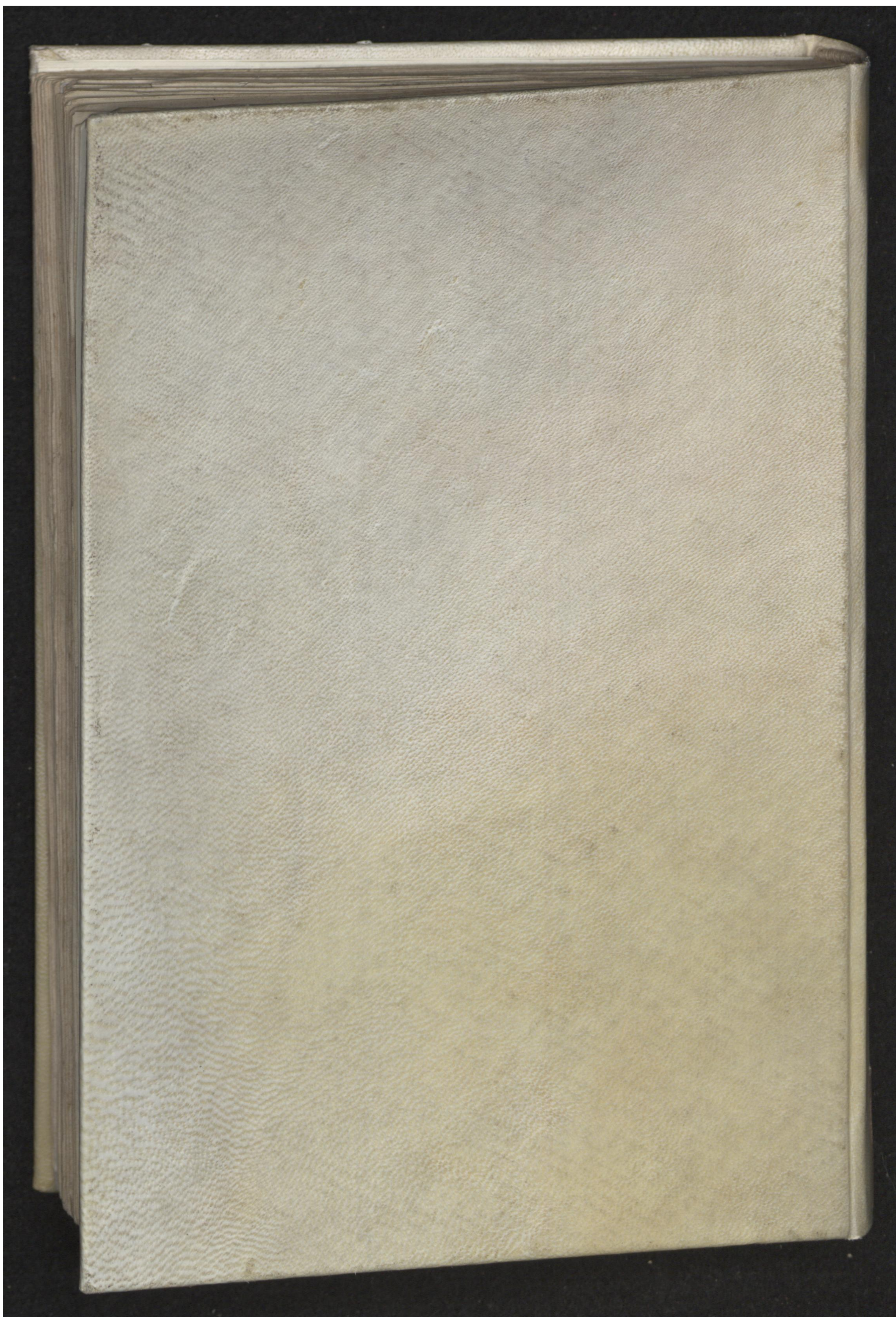
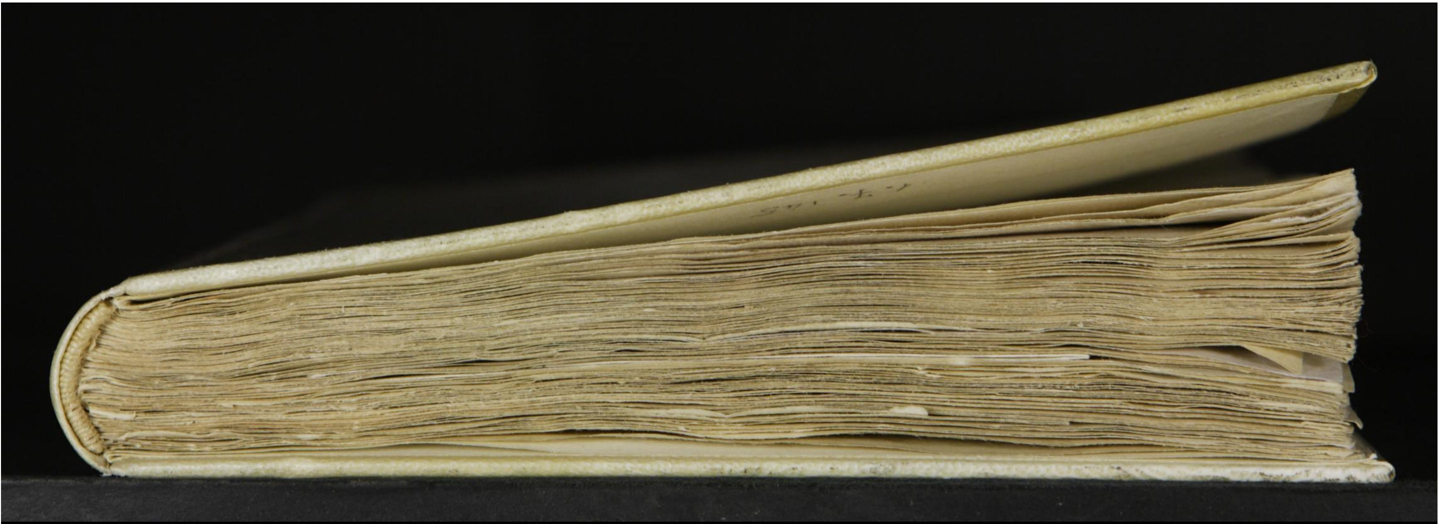



1
7
145









3

MARINI GHETALDI PATRITII RAGVSINI, VARIORVM PROBLEMATVM COLLECTIO.

CVM PRIVILEGIIS.



VENETIIS,

Apud Vincentium Fiorinam.

M DC VII.

2



VIRO
ILLVSTRI
MARINO
GOZIO,
PATRITIO
RAGVSINO
Marinus Ghetaldus S. P. D.



ESIODVS Scriptor ſanè iuxta antiquus, ac nobilis, in referenda gratia imitari nos iubet agros fertiles, qui plus multo afferunt quàm acceperunt. Ego Marine ſi voluntati reſponderet facultas, feraces agros non imitarer modo, verum etiam ſuperarem. Enimuerò ingenij mei quaſi ager haud ſcio, an potiorem quam te colonum agnoſcat, qui dum me patria corporis verius alumna, quam animi, in alienas terras ingeniorum altrices vnà tecum extraxiſti, quaſi coluiſti agrum, quam autem gentem ad Doctorum multiplicitatem ſex annis vna peregrinati non adiuimus? Superiorem Germaniam omnem percurrimus: inferiorem totam,

4

Belgiumque lustrauimus: duos annos consedimus in Britania: Galliam deinde peragrauimus, & Italiam vniuersam, quas inter gentes, quot ego Doctores nactus sum (nactus autem sum plures) tot agro tu quasi præfecisti operarios. Accipe igitur ex culto agello, eo quo tibi offertur studio, huius anni fructum (præteritorum enim ideo non obtuli, quia fructus dare tibi nolui nisi prægustatos probatosque) qui si fortè minor est semente, totus est certè quem messui: talisque qui à Domino omnibus Reipublicæ nostræ muneribus perfuncto suam mutuabitur amplitudinem, suum decus.

Vale. Ragusij 13. Kal. Iunij MDCVI.

MARINI GHETALDI VARIORVM PROBLEMATVM COLECTIO.



INTER Problemata, quæ construere aggredior, sunt quædam Ioannis Regiomontani, quorum Geometricam constructionẽ ipse non exhibet, quamuis ea Algebrice, vel per sinus explicet. At problemata, quæ Algebrice explicari possunt, dummodo quadratorum metam æquationes nõ excedant, possunt quoq; & Geometrica ratione cõstrui, qua methodo, quave ratione, in in librò de resolutione, & cõpositione abunde explicabimus. Interim problemata illa Regiomõtani Geometrice construã, quæ vt ab alijs dignoscantur, erunt in margine notata, reliqua verò partim à Clauio, & Griembergerio, quorum in Mathematicis disciplinis præstantiam nemo non nouit, nemo non admiratur, partim à Iacobo Restio, cuius breui aliquid illucescet ingenij, mihi proposita fuerunt ad construendum, partim à me ipso excogitata.

Perpendicularis trianguli vocatur ea recta linea, quæ ab angulo verticis cadit in basim ad rectos angulos.

Segmenta basis dicuntur ea quæ fiunt à perpendiculari.

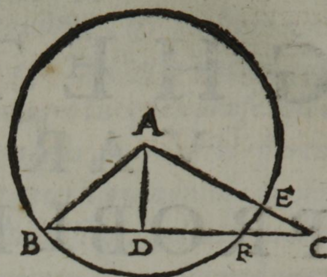
LEMMA I.

DIFFERENTIA segmentorum basis trianguli maior est quam laterum differentia.

Exponatur enim triangulum ABC, in quo perpendicularis AD secet basim in duo segmenta BD, DC, & centro A, interuallo

uallo AB, quod ſit latus minus, deſcribatur circulus BFE ſecans latus AC in E, baſim verò BC, in F, eſt igitur laterum AB, AC, differentia EC, differentia verò ſegmentorum BD, DC, ipſa FC ſunt

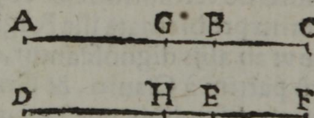
3. Tertij. * enim BD, DF æquales, & quoniam AC ad centrum pertingit,
8. Tertij. ipſius pars exterior EC minima* erit incidentium circulo ab eodẽ C puncto; quare FC differentia ſegmentorum baſis, maior erit quam EC, differentia laterum, quod erat oſtendendum.



LEMMA II.

SI duo rectangula fuerit æqualia, fuerint autem & quadrata laterum primi, æqualia quadratis laterum ſecundi, latera primi lateribus ſecundi æqualia erunt, maius videlicet maiori, minus minori.

Sit rectangulum ABC æquale rectangulo DEF, & quadrata AB, BC, ſimul ſumpta æqualia quadratis DE EF ſimul ſumptis. Dico rectas AB, BC rectis DE EF æquales eſſe, maiorem videlicet maiori, minorem minori. Quoniam enim quadrata AB, BC æqualia ſunt quadratis DE, EF, & rectangulum ABC æquale rectangulo DEF, quadrata AB, BC, vna cum rectãgulo ABC æqualia erunt quadratis DE, EF, vna cum rectangulo DEF, duplicentur rectangula ABC. DEF, quadrata igitur AB, BC, vna



4. Secũdi. cum duplo rectanguli ABC hoc eſt * quadratum AC, æquale
4. Secũdi. erit quadratis DE EF, vna cum duplo rectanguli DEF, hoc *eſt quadrato DF, quare & recta AC æqualis erit rectæ DF. Iam ſe-
5. Secũdi. centur ipſæ AC, DF, bifatiam in G, & H, erunt igitur AG, DH, æquales, & æqualia quoque earum quadrata, ſed quadratum * AG æquale eſt rectangulo ABC, vnà cum quadrato GB, & qua-
5. Secũdi. dratum * DH æquale rectangulo DEF, vnà cum quadrato HE, rectangulum igitur ABC, vnà cum quadrato GB æquale erit

rectan-

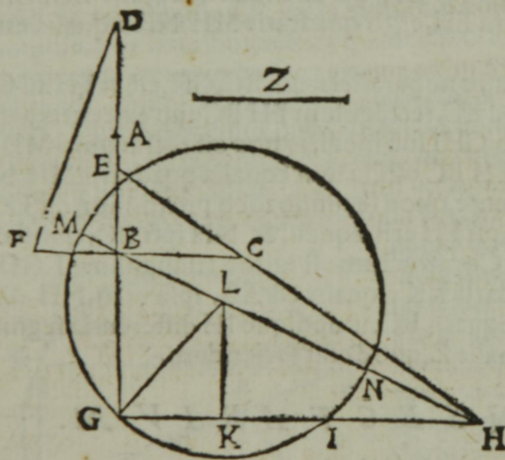
rectangulo DEF, vnà cum quadrato HE, auferantur æqualia rectangula ABC DEF, reliquum igitur quadratum GB, reliquo quadrato HE æquale erit, vnde & recta GB æqualis rectæ HE, quare per additionem, & subductionem æqualium æqualibus erit AB æqualis DE, & reliqua BC æqualis reliquæ EF, quod erat ostendendum.

Problema I.

DATA perpendiculari, differentia laterum trianguli, & differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

Sit data perpendicularis trianguli AB, differentia laterum BC, & differētia segmentorum basis, Z, oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad rectos angulos AB, BC, ipsaque BA duplicetur in D, in & in ea ponatur CE çqualis Z, est autē ipsa Z, ex antecedēte, quod primo loco præmissum est Lēmate, maior quam BC, deinde pducatū CB in F, vt sit BF çqualis BE, & iūgatur FD, & pducatū quoque AB in G, vt sit EG æqualis DF, ipsi autem BC parallela agatū GH, secans EC continuatā in H, & in ea sumatur HI æqualis EC, reliqua verò IG secetur bifariam, & ad rectos angulos in K a recta linea KL æquali ipsi BA, & iungantur GL, LH, in triāgulo igitur LGH perpendicularis LK çqualis est AB ex constructione, & IH differentia segmentorū GK, KH çqualis EC, hoc est ipsi Z. Superest igitur, vt differentia laterum

Prob. 43. lib. secundi de triāgulis Regio monta ni.



terum LG,LH æquetur ipſi BC, id autem ita fiet manifeſtum.

Centro L,interuallo LG,deſcribatur circulus ſecãs rectam HL,continuatam in punctis M, N, differentia igitur laterum
8. Tertij. LG,LH erit NH,& circulus MGN tranſibit per I, ſunt * enim GK,KI æquales,& LK perpendicularis eſt ipſi GI.

Quoniam igitur MH ſecta eſt in N,quadrata MH,HN æqua
7. Secũdi. lia * erunt duplo rectãguli MHN,vnà cum quadrato MN, hoc eſt vnà cum quadruplo quadrati LG, diameter enim MN dupla eſt LG ſemidiametri,ſed duplum rectanguli MHN,æquale eſt duplo rectanguli GHI, & quadruplum quadrati LG,ęquale quadruplo quadratorum GK,LK,hoc eſt quadratis GI,DB, ſunt enim GI,DB ipſarum GK,LK duplæ, ergo quadrata MH, HN æqualia erunt quadratis GI,DB,vna cum duplo rectanguli
7. Secũdi. li GHI,ſed quadratum GI vnà cum duplo rectanguli GHI,* æquale eſt quadratis GH,IH,hoc eſt GH,EC:quadrata igitͣ MH, HN quadratis GH, EC, DB æqualia erunt, ſed quadrato EC æqualia sũt quadrata EB,BC,hoc eſt FB,BC,ergo quadratis MH NH,quadrata GH,DB,BC,FB ęqualia erunt,quadratis aũt DB, FB æquatur quadratũ DF,hoc eſt EG,ergo quadrata MH,NH æqualia erũt quadratis GH, BC, EG, ſed quadratis EG, GH æquatur quadratum EH,ergo quadratis MH,NH æqualia erunt quadrata EH,BC.

Et quoniam ratione parallelarum BC,GH,eſt vt EH ad GH, ita EC,ideſt IH ad BC,rectãgulum EH BC ſub extremis æquale erit rectangulo GHI ſub medijs, hoc eſt rectangulo MHN, ſed & quadrata EH,BC oſtẽſa ſunt ęqualia qqadratis MH,NH, ergo ex antecedente,quod ſecundo loco præmiſſum eſt Lemmate,recta MH ipſi EH erit æquali, & NH ipſi BC, quod erat oſtendendum. Conſtructum eſt igitur triangulum LGH in quo perpendicularis LK æqualis eſt AB, ipſa verò NH differentia laterum,æqualis BC,ac denique IH differentia ſegmentorum baſis,æqualis Z,quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta, quę poteſt differẽtiam quadratorum ex differentijs laterũ videlicet,& ſegmentorum baſis, ad rectam, quæ poteſt quadratum perpendicularis duplæ, & prædictam quadratorum differentiam, ita differẽtia laterum ab baſim, & ita differentia ſegmentorum baſis ad laterum aggregatum.

Eſt enim vt EB ad EG,hoc eſt ad DF,ita BC, vel NH ad GH,

&

& ita EC, seu IH ad EH, hoc est ad MH, cui æqualis est composita ex GL, LH.

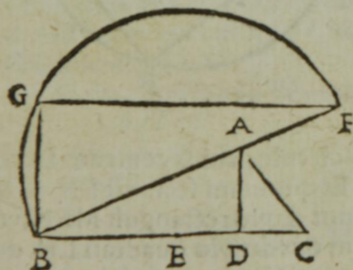
In numeris sit LK 20, NH 27, IH 33, erit GH 63, composita ex GL, LH 77, vnde LG 25, LH 52.

Est enim vt L 360, ad L 1960, idest vt L 9, ad L 49, seu 3, ad 7, ita 27, ad 63, & ita 33, ad 77.

LEMMA.

RECTA quæ potest quadratum compositæ ex lateribus trianguli, minus quadrato differentiæ segmentorum basis, maior est perpendiculari dupla.

Sit triangulum ABC, in quo perpendicularis A D, secet basim B C in duo segmenta inæqualia B D, DC, quorum differentia sit B E, & continuetur BA in F, longitudine A C, erit igitur BF compositæ ex lateribus B A, AC, æqualis, itaque in ipsa BF, describatur semicirculus BGF, in quo accõmodetur BG æqualis BE, & conectatur GF, recta igitur GF poterit quadratũ B F, compositæ ex lateribus, minus quadrato G B, hoc est BE differentiæ segmentorum basis: angulus enim BGF in semicirculo rectus est. Dico ipsam GF maiorem esse dupla perpendiculari AD. Quoniam enim quadratum BF constat quadratis B A, A F, & duplo rectanguli B A F, duplum verò rectanguli B A F, maius est duplo quadrati AD, nam vtraque ipsarum B A, AF maior est ipsa AD, quadrata quoque BA, AF simul maiora sunt duplo quadrati AD, pro quãtitate quadratorum BD, DC: quadratũ igitur BF quadruplo quadrati AD multo maius erit, quam pro quantitate quadratorum BD, DC, sed quadratũ BF maius est quadrato GF, pro quãtitate quadrati GB tantum, hoc est BE, ergo quadratum G F, maius erit quadruplo quadrati AD,

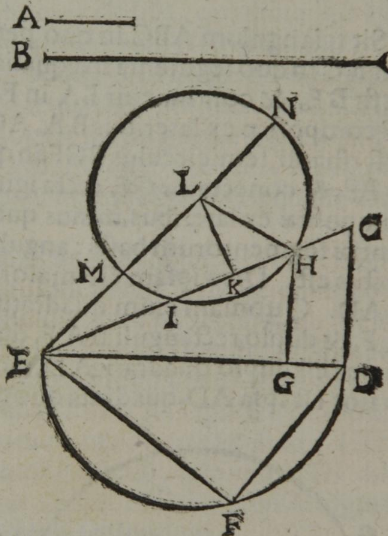


hoc est quadrato AD duplæ, quare & GF maior erit, quam AD dupla, quod erat ostendendum.

Problema II.

DATA perpendiculari, aggregato laterum trianguli, & differentia ſegmentorum baſis, inuenire triangulum.

Sit data perpendicularis trianguli A, aggregatum alterum B, & differentia ſegmentorũ baſis CD. Oportet inuenire triangulum: à puncto D, ipſi CD ducatur perpendicularis DE, & in ea ponatur CE æqualis ipſi B, & deſcribatur ſemicirculus EFD, in quo accõmodetur DF, ęqualis duplę ipſius A, hoc autem fieri poteſt, nam ex antecedẽte Lemmate, ED maior eſt quam A dupla, conectatur igitur EF, cui ęqualis ponatur EG, ipſi autem DC parallela agatur GH, ſecans EC in H, & ponatur EI æqualis CD, reliqua verò IH ſecetur bifariam, & ad rectos angulos in K à recta KL æquali ipſi A, & conectantur EL, LH, & centro L, interuallo LH, deſcribat circulus HMN, ſecans EL producta in punctis M, N. Quoniam igitur ex L centro cadit in IH perpendicularis LK ſecans ipſam IH bifariam, circulus cuius centrum L tranſiens per H, tranſibit & per I. Et quoniam ſecta eſt EN in M, quadrata EM, EN * æqualia erunt duplo rectanguli MEN, vnà cum quadrato MN, hoc eſt cum quadruplo quadrati LH, diameter enim MN dupla eſt LH ſemidiametri, ſed duplum rectanguli MEN æquale eſt duplo rectanguli IEH, & quadruplum quadrati LH æquale quadruplo quadratorum LK, KH hoc eſt quadratis DF, IH, ſunt enim DF, IH ipſarum LK, KH



7. Secũdi.

duplæ

duplæ, ergo quadrata EM, EN æqualia erunt quadratis DF, IH, vna cum duplo rectanguli IEH: quadrato autem IH, vnà cum duplo rectanguli IEH, * æqualia sunt quadrata EI, EH, hoc est CD, EH, quadratis igitur EM, EN, quadrata DF, EH, CD æqualia erunt, sed quadrato EH æqualia sunt quadrata HG, EG, hoc est HG, EF, ergo quadratis EM, EN æqualia erunt quadrata DF, CD, HG, EF, at quadrata DF, EF æqualia sunt quadrato ED, quadrata igitur EM, EN æqualia erunt quadratis ED, CD, HG, sed quadrata ED, CD quadrato EC sunt æqualia, ergo quadrata EM, EN quadratis HG, EC, æqualia erunt. 7. Secūdi.

Et quoniam propter parallelas CD, HG est EH, ad HG sicut EC, ad CD, hoc est ad EI, rectangulum IEH sub extremis, hoc est MEN æquale erit rectangulo ECHG sub medijs, sed & quadrata EM, EN ostensa sunt æqualia quadratis HG, EC, ergo ex Lemmate 2, quod primo Problemati præmissum est recta EM æqualis erit ipsi HG, & EN composita videlicet ex lateribus EL, LH æqualis EC, hoc est ipsi B, est autem & perpendicularis LK æqualis ipsi A ex constructione, & EI differentia segmentorum EK, KH, æqualis CD. Constructum est igitur triangulum ELH, quale construendum proponebatur.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta quæ potest quadratum compositæ ex lateribus trianguli, minus quadrato differentiæ segmentorū basis, ad rectam quæ potest quadratum prædictæ compositæ, minus quadratis, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & perpendiculari dupla, ita composita ex lateribus ad basim, & ita differentia segmentorum basis ad laterum differentiam.

Est enim vt ED ad EG, hoc est ad EF, ita EC, vel EN, cui æqualis est composita ex EL, LH, ad EH, & ita CD hoc est EI, ad HG, hoc est ad EM.

Sit LK 20, cōposita ex EL, LH 77, EI 33, erit EH 63, EM 27, vnde EL 52, LH 25.

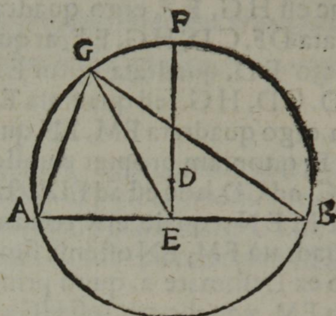
Est enim vt L 4840, ad L 3240, idest vt L 121, ad L 81, seu quod idem est vt 11, ad 9, ita 77, ad 63, & ita 33, ad 27.

LEMMA

Si ab angulo verticis trianguli ducta recta linea secuerit bifariam basim, & angulus verticis fuerit acutus, illa recta linea

ſecans maior erit quam dimidia baſis, non autem quam pars diametri circuli circa triangulum deſcripti, ea ſcilicet quæ in portione in qua eſt triangulum, comprehenditur. Si verò angulus verticis fuerit obtuſus, illa ſecans minor erit dimidia baſe, non autem prædicta diametri parte.

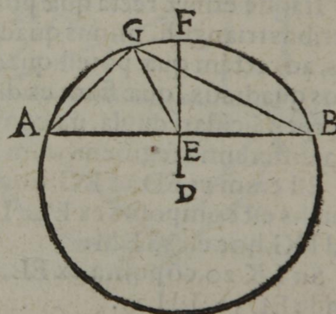
Cadat ab angulo verticis triã-guli AGB recta linea GE ſecãs baſim AB bifariam in E, & circa triangulum AGB circulus deſcribatur, cuius centrum ſit D, & iuncta ED producatur ad circumferentiam in F. Dico exiſtente angulo AGB acuto, ipſam GE maiorem eſſe quam AE, non autem quam EF. Contrauerò exiſtẽte angulo AGB obtuſo, ipſam GE minorem eſſe quam AE, non autem quam EF. Sit primum angulus AGB acutus, ergo portio circuli AGB



7. Tertij. maior erit ſemicirculo, & centrũ erit inter E, F, maior * igitur erit EG quam AE, minor verò quam EF, pars videlicet diametri circuli, quæ in portione AGB comprehenditur. Si verò punctum G ſit idem quod F, erit GE æqualis ipſi FE, immo eadem, non autem maior.

Deinde ſit angulus AGB obtuſus, erit igitur portio circuli AGB minor ſemicirculo, & centrum D erit extra lineã FE,

7. Tertij. itaque GE * minor erit quam AE, maior verò quam FE, at ſi punctum G fuerit idem quod F, erit GE æqualis ipſi FE, immo eadem, non autem minor, quare conſtat propoſitum.

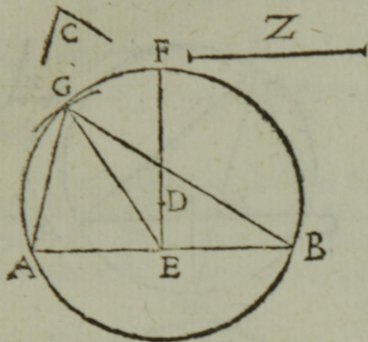


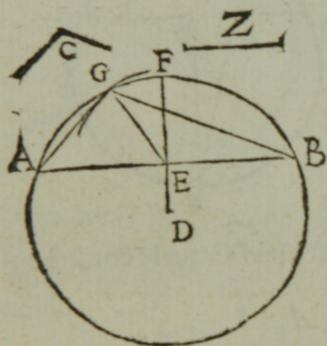
Problema III.

29. lib. 2. de triangulis Regiomõtãi. *DATA baſe trianguli, & angulo verticis, dataque recta linea, quæ à dato angulo ducta ſecat baſim bifariam, inuenire triangulum.*

Sit

Sit data basis trianguli AB, datus quoq; angulus ad verticem æqualis angulo C, ac data denique recta linea, quæ à dato angulo ducta secat basim bifariam, sit Z, oportet inuenire triangulum. Secetur AB bifariam in E, & in ea describatur portio circuli AGB, quæ suscipiat angulum æqualem angulo C, & per punctum E, & centrũ circuli, quod sit D, ducatur recta linea EDF vsque ad circumferentiam portionis. Si igitur angulus C fuerit acutus, ex antecedente Lemmate erit Z, maior quam AE, non autem quã FE, si verò obtusus, ipsa Z minor erit quam AE, non autem quam FE, quocunque igitur casu circulus descriptus ex E centro ad interuallum rectę Z æquale, secabit, vel tanget portionem circuli AGB, describatur, & secet, vel tangat in G, & iungantur AG, GB, GE, trianguli igitur AGB, angulus AGB ad verticem æqualis est angulo C: portio enim circuli AGB suscipit angulum æqualem ipsi C, est autem & basis ipsa AB data, & GE secãs ipsam basim bifariam, æqualis est Z datæ, quare factum est quod oportebat.





At verò si datus angulus C fuerit rectus, oportebit datam Z, æqualem esse dimidiæ basi AB, & omne triangulum rectangulum supra basim AB constitutum problema efficiet.

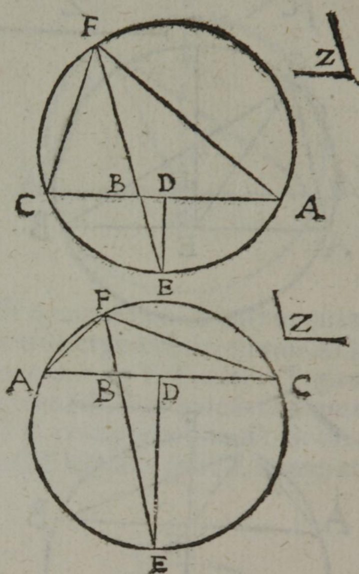
Problema IV.

SECET recta linea angulum ad verticem trianguli bifariam, & cadat in basim non ad rectos angulos. Da- *33. lib 2. de trian. Reg o non tani.*

tis portio-

tis portionibus basis, & angulo, quem ipsa linea cum base constituit, inuenire triangulum.

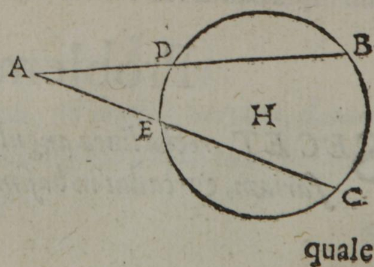
Sint datæ portiones basis A B, B C, angulus autem quem linea secans cum ipsa base constituit, sit æqualis angulo Z. Oportet inuenire triangulum, ponatur in directum AB, B C, & secetur AC bifariã in D perpendiculariter à recta D E, & fiat angulo Z æqualis angulus CBF, & producta FB occurrat rectæ DE in E, & per puncta AEC, circulus describatur, quem secet recta BF in F, & iungantur AF, F C. Quoniam igitur DE secat AC bifariã, & ad rectos angulos, erunt circumferentię AE, EC æquales; quare & anguli AFE, EFC æqualibus circumferentijs insistentes erunt æquales, recta igitur FB secat angulũ A F C aduertice trianguli AFC bifariam, est autem & angulus CBF æqualis angulo Z ex constructione, & portiones basis A B, B C, sunt ipsæ datæ. Constructum est igitur triangulũ AFC, quale construendum proponebatur.



LEMMA I.

SI duæ rectæ lineæ circulum secent, & extra ipsum conueniant, erit prima ad secundum, sicut pars exterior secundæ ad partem exteriorem primæ.

Secent circulum sub centro H descriptũ, duæ lineę rectæ AB, AC, & extra ipsum conueniant in A, & sint partes exteriores ipsarum A D, AE. Dico esse AB ad AC sicut AE ad AD. Quoniam enim rectangulum BAD æ-



quale

quale est rectãgulo CAE, erit AB, ad AC, sicut AE ad AD, quod erat ostendendum.

LEMMA II.

SI basis trianguli fuerit latere maiori maior, dupla laterum differentia, differentiam segmentorum basis excedet.

Sit triangulum ABC, cuius basis BC sit maior latere maiori AB, & centro A, interuallo AC, describatur circulus CEF, secans latus AB productum in punctis F, G, basim verò BC in E, & cadat in BC perpendicularis AD, erit igitur laterum AB, AC differentia B F, differentia verò segmentorum BD, DC ipsa BE, æquales * enim sunt ED, DC, 3. Tertij. Dico duplam BF maiorem esse ipsa BE. Quoniam enim BC maior ponitur quam B A, erit dupla BC maior quam dupla B A, & consequenter multo maior quam BG. Et quoniam ex antecedente Lemmate est vt BC, ad BG, ita BF ad BE, duplatis antecedentibus, erit vt dupla BC, ad BG, ita BF dupla ad BE, sed dupla BC maior ponitur quam BG, ergo & BF dupla maior erit quam BE, quod erat demonstrandum.

Problema V.

DATA differentia laterum trianguli, & differentia segmentorum basis, datoque excessu inter latus maius, & basim, inuenire triangulum.

Sit data differentia laterum trianguli AB, differentia segmentorum basis Z, & excessus inter latus maius, & basim, AE. Oportet inuenire triangulum. Duplicentur AB, AE, hæc in M, illa in C, & sit primũ excessus penes basim, ergo ex antecedente quod secundo loco præmissum est Lemmate, erit AC maior quam Z, ab ipsa igitur AC auferatur CD æqualis Z, & fiat vt AD ad

ad D C, ita MB ad BG, maior igitur erit BG quam BM, quia & DC maior eſt quam AD : auferantur æquales B C, BA, reliqua igitur CG maior erit quam reliqua M A, & cum ſecetur CG biſariam in L, erit quoque LG maior quã EA, in ipſa igitur LG



ſumatur LF æqualis E A, & centro L, interuallo L C, vel LG, deſcribatur circulus CIG. Similiter & centro B, interuallo BF, alius circulus deſcribatur ſecans priorem in I, & conectantur BI, LI, ipſam autem BI ſecet circulus CIG in H, perpendicularis verò LK, in K. Quoniam igitur A B, B C, ſunt æquales ex conſtructione, & æquales quoque C L, LG, erit AG ipſius BL dupla, & quoniam BI ſuperat ipſam BL, exceſſu LF, hoc eſt AE, ſuperabit BI dupla duplam BL, hoc eſt ipſam AG, exceſſu AE duplo, hoc eſt exceſſu A M, quare MG ipſius BI dupla erit. Et quoniam eſt vt AD ad DC, ita MB ad BG, erit componendo, vt AC hoc eſt vt BC dupla ad DC, ita MG hoc eſt BI dupla ad BG, & ſubduplatis antecedentibus, erit vt BC, ad DC, ita BI ad BG, ſed vt BI ad BG, ita eſt BC ad BH, ergo vt BC ad DC, ita erit BC ad BH, æqualis igitur erit BH differentia ſegmentorum BK, KI, ipſi DC, hoc eſt Z datæ, eſt autem & BC differentia laterũ B L, LI, æqualis ipſi AB ex conſtructione, & exceſſus LF, quo baſis BI ſuperat latus maius BL, æqualis EA datæ. Conſtructum eſt igitur triangulum BLI, quale conſtruendum proponebatur.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt exceſſus, quo dupla differentia laterum trianguli ſuperat differentiam ſegmentorum baſis, ad compoſitam ex differentia laterum, & duplo exceſſu, quo baſis latus maius excedit, ita differentia ſegmentorum baſis ad aggregatum laterum, & ita differentia laterum ad baſim.

Cum enim ſit AD ad DC, ſicut MB ad BG, erit permutando, vt AD ad M B, ita DC hoc eſt BH ad B G, & conſequenter ita BC ad BI, eſt enim BC ad BI, ſicut BH ad BG.

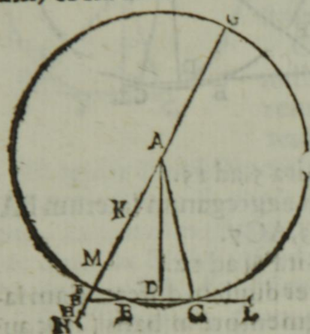
Sit

Sit BC 12, BH 16, LF 4, erit BG: hoc est composita ex lateribus BL, LI 40, basis verò BI 30, vnde BL 26 LI 14.

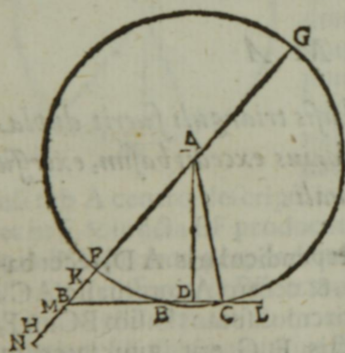
Est enim vt 8, ad 20, ita 16, ad 40, & ita 12, ad 30.

Si verò excessus fuerit penes latus.

Erit vt excessus inter differentiam segmẽtorum basis, & duplam differentiam laterum trianguli, ad excessum inter differentiam laterum, & duplum excessum quo latus maius superat basim, ita differentia segmentorum basis, ad aggregatum laterum, & ita differentia laterum ab basim.



Sit enim triangulum ABC, in quo perpendicularis A D, secet basim B C in duo segmenta BD, DC, & latus A B, quod sit maius latere AC excedat basim B C; & centro A interuallo AC describatur circulus secans basim BC in E, latus verò BA productum in punctis F, G, erit igitur laterũ AB, AC differentia FB: differentia verò segmentorum BD, DC, ipsa B E. Duplicetur FB in H, & producatur BC in L, vt sit CL excessus, quo BA ipsam BC superat, cui excessui sumantur HM, MK æquales, & sumatur quoque FN, æqualis BE. Dico vt NH, ad BK, ita esse BE, ad BG, & ita BF, ad BC. Quoniam enim HB, BF sunt æquales ex constructione, & æquales quoque FA, AG, erit HG ipsius AB dupla, & quoniam BA superat basim BC excessu CL: hoc est HM, superabit HG duplam BC excessu HM duplo, hoc est excessu H K, ergo KG ipsius BC dupla erit.



Et quoniã est * vt BF, ad BE, ita BC, ad BG, duplatis antecedentibus, erit vt HF ad BE, hoc est ad FN, ita KG ad B G, & diuidendo, vt NH ad NF, ita BK, ad BG, ac denique permutando, erit vt NH ad BK, ita NF, hoc est BE, ad BG, quod estò primum. *Ex ant. 1 Lem.*

Quoniam igitur est vt N H, ad BK, ita BE, ad BG, vt autẽ BE,

ad BG, ita BF ad BC, erit vt NH, ad BK, ita BF, ad BC, quod secundo loco erat demonstrandum.

Sit BF 4, BE 10, CL 5, erit BG composita ex lateribus BA, AC 30, basis verò BC 12, vnde AB 17, AC 13.

Est enim vt 2, ad 6, ita 10, ad 30, & ita 4, ad 12.

Rursus sit BF 5, BE 11, CL 4, erit composita ex lateribus BA, AC 33, basis verò BC 15, vnde AB 19, AC 14.

Est enim vt 1, ad 3, ita 11, ad 33, & ita 5, ad 15.

Sit denique BF 6 BE 10, CL 1, erit aggregatum laterum BA, AC 20, basis verò BC 12, vnde AB 13, AC 7.

Est enim vt 2, ad 4, ita 10, ad 20, & ita 6, ad 12.

Quod si nullus fuerit excessus inter duplam differentiam laterum trianguli, & differentiam segmentorum basis (hoc autem accidit, quando segmentorum differentia dupla est differentiæ laterum) non vnum triangulum problemati satisfaciet, sed infinita: construi enim possunt infinita triangula, vt quæ sunt differentiæ in vno, eædem sint in omnibus, sed priusquam huiusmodi constructionem exhibeamus, sequens Lemma demonstrabimus.

LEMMA

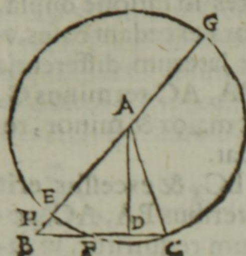
Si differentia segmentorum basis trianguli fuerit duplæ differentiæ laterum, latus maius excedit basim, excessu dimidiæ laterum differentiæ æquali.

Sit triangulum ABC, in quo perpendicularis AD, secet basim BC in duo segmenta BD, DC, & centro A, interuallo AC, quod sit minus latus, describatur circulus secans basim BC, in F, latus verò AB productum in punctis E, G, erit igitur laterum AB, AC differentia BE, differentia verò segmentorum BD, DC, ipsa BF, sunt * enim FD, DC æquales, sit autem BF dupla ipsius BE. Dico latus AB excedere basim BC, excessu dimidiæ BE, æ-

3. Tertij.

quali

quali, secetur enim BE bifariam in H. Quoniam igitur BF ponitur dupla ipsius BE, & est vt BF ad BE, ita BG, ad BC, erit quoque BG, dupla ipsius BC, & quoniam GE dupla est ipsius AE, & BE dupla ipsius EH, tota GB ipsius AH dupla erit: æqualis igitur erit AH, ipsi BC, ergo AB superabit ipsam BC, excessu HB, sed HB est dimidia ipsius BE, ergo latus AB excedet, basim BC excessu æquali dimidiæ BE, quod erat demonstrandum.



Constructio prædicti casus, in quo nullus est excessus inter duplam differentiam laterum trianguli, & differentiam segmentorum basis.

Sit igitur data differentia laterum BE, differentia segmentorum basis Z, quæ sit dupla ipsius BE, ergo ex antecedente Lemmate latus maius trianguli excedet basim, & excessus æqualis erit dimidiæ BE, his igitur datis. Oportet inuenire triangulum, Producatur BE, ad quodcunque punctum G, ea tamen cautione, vt BG sit maior quam quadrupla BE, & circa diametrum EG describatur circulus cuius centrum A, ipsumque circulum tangat secta linea BH, in H. Quoniam igitur BG posita est maior quã BE quadrupla, rectangulum EBG, hoc est quadratum BH maius erit quadruplo quadrati BE, hoc est quadrato Z: est enim Z quadratum quadruplum quadrati BE, quia Z dupla ponitur ipsius BE, ergo & BH maior erit quam Z, si igitur centro B interuallo rectæ Z æquali circulus describatur, secabit circumferentiam circuli sub A centro descripti, inter puncta E, H, describatur, & secet in F, & iuncta BF producatur in C, & iungatur quoque AC, & in BC ducatur perpendicularis AD, erit igitur segmentorũ BD, DC, differentia BF, laterum verò AB, AC, differentia BE, est autem BF æqualis Z ex constructione, & BE ipsa data, & quoniam BF dupla est ipsius BE ex antecedente Lẽmate, trianguli ABC latus AB excedet basim BC, dimidia BE. Constructũ est igitur triangulum ABC, &c. quod faciendum erat.



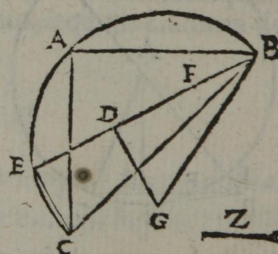
CONSECTARIVM.

Constat igitur infinita triangula construi posse, ita vt differentiæ laterum & segmentorum existentes in ratione dupla, sint in omnibus eædem, atque latera maiora excedant bases, vno eodemque excessu, dimidia videlicet laterum differentia rectæ enim BG compositæ ex lateribus BA, AC terminus G, non est præfinitus: illa enim potest esse, & maior & minor, requiritur tantum vt quadruplam BE, excedat.

Sit BE 2, BF 4, latus AB excedet basim BC, & excessus erit nempe dimidia BE, composita verò ex lateribus BA, AC, potest esse 9, 10, 11, 12, vel etiam maior, solum requiritur, vt superet numerum 8, nempe quadruplam BE. Similiter & basis BC potest esse 5, 6, 7, 8, vel cuiuscunque longitudinis ipsa 4, maioris.

Problema VI.

DATA base trianguli angulum rectum subtendente, & differentia laterum, inuenire triangulum.



Sit data basis trianguli anguli rectum subtendens AB, differentia laterum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta BC fiat diameter circuli, eius igitur circumferentia transibit per A, in ipso autem circulo CAB accommodetur CE æqualis ipsi Z, & iungatur EB, & in ea sumatur BF æqualis EC, vel Z, reliqua EF secetur bifariam in D perpendiculariter à recta DG, æquali ipsi DE, vel DF, & iungatur BG, erit igitur laterum DB, DG trianguli DBG differentia FB, hoc est Z data.

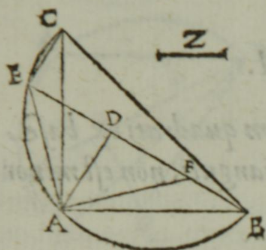
Et quoniam rectus est angulus CEB, in semicirculo, quadratum CB, æquale erit quadratis EB, EC, hoc est EB, FB, sed quadrata EB, * FB, dupla sunt quadratorum ED, DB, hoc est DG, DB, ergo quadratum CB duplum erit quadratorum DG, DB, sed duplum est & quadrati AB, ergo quadratum AB, æquale

10. Secūdi

erit

erit quadratis DB, DG, hoc est quadrato GB, quare & recta AB æqualis rectæ GB. Constructum est igitur triangulum DBG rectangulum in D, cuius laterum DB, DG differentia FB, æqualis est Z datæ, & basis GB angulum rectum subtendens æqualis ipsi AB, quod erat faciendum.

ALITER. Ducatur, vt prius ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, in quo accommodetur CE æqualis Z, & iungatur EB, cui perpendicularis agatur AD, ipsi autem ED ponatur æqualis DF, & iungantur AE, AF. Quoniam igitur anguli AEB, ACB in eadem portione circuli existentes sunt interse æquales, & est semirectus ACB, erit & AEB semirectus: angulus autem EDA rectus est ex constructione reliquus igitũ DAE semirectus erit: tres enim interni anguli trianguli EDA duob. rectis sunt ęquales, angulus igitur AED angulo EAD ęqualis erit, quare & latus DA lateri DE, vel DF, vnde laterum DA, DB differentia erit FB. Et quoniam latera DE, DA trianguli EDA æqualia sunt lateribus AD, DF trianguli ADF, vtrunque vtrique, & anguli ad D æquales, nempe recti, erunt ipsa triangula æqualium laterum, & angulorum, latus igitur AF, lateri AE æquale erit, & angulus DAF æqualis angulo DAE, sed ostensus est semisectus DAE, ergo & DAF semirectus erit, atque adeo totus angulus EAF rectus erit, & ideo æqualis recto CAB, ablato communi angulo CAF, reliquus igitur FAB reliquo EAC erit æqualis, sunt autem & latera AF, AB trianguli AFB æqualia lateribus AE, AC trianguli AEC, vtrunque vtrique, ergo & basis FB, basi EC, hoc est ipsi Z æqualis erit. Ad datam igitur basim AB constitutum est triangulum ADB, cuius laterum DA, DB differentia FB æqualis est Z, datæ, quod erat faciendum. 10. Secundi.



CONSECTARIVM.

Itaque excessus, quo duplum quadrati à base subtendente angulum rectum trianguli, superat quadratum differentiæ laterum, æqualis est quadrato aggregati laterum.

Excessus enim quo duplum quadrati AB superat quadratum

FB,

FB, hoc est excessus, quo quadratum CB superat quadratũ CE, est ipsum quadratum EB, compositæ videlicet ex lateribus, AD, DB.

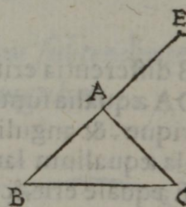
Sit AB 10, FB 2, erit composita ex AD, DB 14, vnde DA 6, DB 8.

Duplum enim quadrati ex 10, est 200, quadratum verò ex 2, est 4, excessus, igitur erit 196, pro quadrato compositæ ex lateribus AD, DB, vnde radix quadrata numeri 196, quæ est 14, erit ipsa composita.

LEMMA.

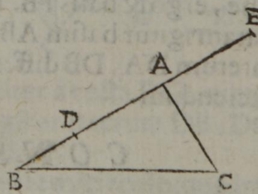
RECTA linea, quæ potest duplum quadrati ex base subtendente angulum rectum trianguli, non est minor aggregato laterum.

Sit triangulum ABC rectangulum in A, cuius basis BC. Dico rectam, quæ potest duplum quadrati BC, nõ esse minorem aggregato laterũ AB, AC, Producatur enim BA in E, vt sit AE æqualis AC, si igitur latera AB, AC sint æqualia, erit EB dupla ipsius AB, & ideo quadratum EB, quadruplũ erit quadrati AB, sed quadruplum quadrati AB æquale est duplo quadrati BC, ergo quadratum EB duplo quadrati BC æquale erit, & consequenter recta, quę potest duplum quadrati BC ipsi EB aggregato laterum AB, AC, erit æqualis, non autem minor.



Si verò latera AB, AC non sint æqualia erit alterum altero maius, sit maius AB, & ex eo abscindatur AD æqualis AC, vel AE. Quoniam igitur quadrata BE, BD * æqualia sunt duplo quadratorum BA, AE, hoc est duplo quadrati BC, duplum quadrati BC, maius erit quadrato BE tantum, & consequenter recta, quæ potest duplum quadrati BC, maior ipsa BE, hoc est aggregato laterum AB, AC, non autem minor. Quocunque igitur casu recta, quæ potest duplũ quadrati ex base subtendente

10. Secũdi

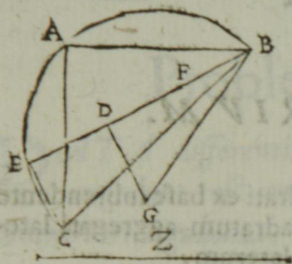


te

te angulum rectum trianguli non est minor aggregato laterũ, quod erat ostendendum.

Problema VII.

DATA base trianguli angulum rectum subtendente, & aggregato laterum, inuenire triangulum.



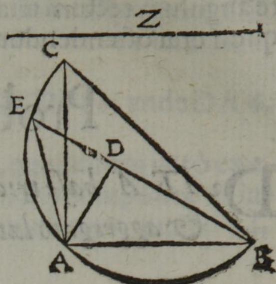
Sit data basis trianguli angulũ rectum subtendens AB, aggregatum laterum Z, oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, ipsa igitur CB ex antedente Lemmate, non erit minor quam Z, ideoque in circulo, circa diametrum CB descripto poterit aptari recta linea ipsi Z æqualis, aptetur & sit BE, & iungatur EC, cui æqualis ponatur BF, reliqua EF secetur bifariam in D perpendiculariter à recta DG, æquali ipsi DF, vel DE, & iungatur BG, erit igitur EB, hoc est Z æqualis aggregato laterum DB, DG. Et quoniam rectus est angulus CEB in semicirculo, quadratum CB æquale erit quadratis EB, EC, hoc est EB, FB, sed quadrata EB, FB * dupla sunt quadratorum ED, DB, hoc est DG, DB, ergo quadratum CB duplum erit quadratorum DG, DB, sed duplum est & quadrati AB, ergo quadratum AB, æquale erit quadratis DB, DG hoc est quadrato GB; quare & recta AB æqualis rectæ GB. Constructum est igitur triangulum DBG rectangulum in D, cuius aggregatum laterum DB, DG, æquale est Z datæ, & basis GB angulum rectum subtendens æqualis ipsi AB, quod erat faciendum.

10. Secundi.

ALITER Ducatur vt prius ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, in quo accommodetur BE æqualis Z, diameter enim CB ostensa est non minor quam Z, ipsi autem EB ducatur perpendicularis AD, & iungatur AE. Quoniam igitur æquales sunt anguli ACB, AEB, sunt enim in eadem portione circuli, erit angulus AEB semirectus; quia semirectus est & ACB, sed rectus est angulus EDA, reliquus igitur DAE trianguli DAE, erit quoque semirectus,

omnis

omnis enim trianguli, tres interni anguli duobus rectis sunt æquales, angulus igitur D A E angulo D E A æqualis erit, vnde & latus D E lateri D A erit ęquale, addita communi DB, composita igitur ex lateribus A D, D B æqualis erit ipsi EB, hoc est Z datę. Ad datam igitur basim AB constitutum est triangulū DAB rectangulum in D, cuius aggregatum laterum DA, DB æquale est Z datæ, quod faciendum erat.



CONSECTARIVM.

Itaque excessus, quo duplum quadrati ex base subtendente angulum rectum trianguli superat quadratum aggregati laterum, æqualis est quadrato differentiæ laterum.

Resumpta enim primæ constructionis figura, excessus, quo duplum quadrati AB, hoc est quo quadratum CB superat quadratum EB, est ipsum quadratum EC, hoc est FB differentiæ videlicet laterum DG DB.

Sit basis GB 10, composita ex lateribus DG, DB 14, erit FB differentia laterum DG, DB 2, vnde DG 6, DB 8.

Duplum enim quadratum ex 10, est 200, quadratum verò ex 14, est 196, excessus igitur erit 4, pro quadrato differentiæ laterum DG, DB, vnde radix quadrata numeri 4, quæ est 2, erit ipsa differentia.

LEMMA.

DIFFERENTIA segmentorum basis trianguli ad differentiam laterum eãdem habet rationem quam aggregatum laterum ad basim.

Sit trangulum ABC, in quo perpendicularis AD secet basim BC in duo segmenta BD, DC, & centro A, interuallo AC, quod sit latus minus, describatur circulus CEF secans basim BC in E, latus

latus verò AB productum in punctis F, G, erit igitur laterum AB, AC differentia BF, aggregatum verò BG, atque differentia segmētorum BD, DC, erit BE: sunt enim æquales * ED, DC, Dico esse BE, ad BF sicut BG, ad BC: rectangulum enim EBC æquale est rectangulo FBG, quare constat propositum.

3 Tertij.

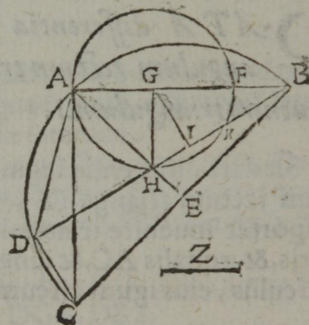
Problema VIII.

DATA differentia segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, & aggregato laterum, inuenire triangulum.

Sit data differentia segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli Z, aggregatum autem laterum AB, Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iungatur CB, in eaque describatur semicirculus, eius igitur circumferentia transibit per A, in ipso autem semicirculo accōmodetur CD æqualis Z, & iungantur DB, DA, ipsi autem CD æqualis ponatur BE, & per E, ipsi DA parallela agatur EF, secans AB, in F, reliqua AF secetur bifariam, & ad rectos angulos in G, à recta GH æquali ipsi GA, vel GF, & iungatur HB. Quoniam igitur parallelæ sunt DA, EF ex constructione, erit vt DB, ad EB, ita AB ad FB, & vt quadratum DB ad quadratum EB, hoc est CD, ita quadratum AB ad FB quadratum, & componendo, erit vt summa quadratorum DB, DC, hoc est vt quadratum CB seu, quod idem est, vt duplum quadrati AB, ad quadratum EB, ita summa quadratorum AB, FB, hoc est * duplum quadratorum AG, GB, vel GH, GB, ad quadratum FB, & subduplaris antecedentibus,

10 Secundi.

dentibus, erit vt quadratum AB ad quadratum EB, ita summa quadratorum GH, GB, hoc est quadratum HB, ad FB quadratum, vnde vt AB ad EB, ita erit HB ad FB, & permutando, vt AB ad HB, ita EB ad FB. Iam agatur GI perpendicularis ad HB, & ipsi HI æqualis ponatur IK, differentia igitur segmentorum HI, IB, erit KB, & ideo ex antecedente Lemmate, erit vt AB ad HB, ita KB ad FB. sed ostensum est vt AB ad HB, ita esse EB ad FB, ergo vt KB ad FB, ita erit EB ad FB, æqualis igitur erit KB ipsi EB, hoc est Z datæ, est autem & composita ex lateribus HG, GB, æqualis ipsi AB; Constructum est igitur triangulum HGB rectangulum in G, cuius aggregatum laterum HG, GB, æquale est AB datæ, & KB differentia segmentorum HI, IB, æqualis ipsi Z, quod erat faciendum.



ALITER. Ducatur vt supra ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB, fiat diameter circuli BAC, cuius centrum E, in ipso autem circulo accommodetur CD çqualis Z, & iungantur DB, AE, se mutuo secantes in H, & ex H ducatur ipsi AB perpendicularis HG. Quoniam igitur rectus est angulus AGH, & semirectus GAH, erit * quoque & reliquus GHA se-
32. Primi mirectus, & ideo ipsi GAH æqualis, vnde latus HG æquale erit lateri GA, addita communi GB, composita igitur ex lateribus HG, GB, erit æqualis ipsi AB.

Iam agatur GI perpendicularis ad HB, & centro G, interuallo GA, vel GH, describatur circulus AHF, secans DB in K, ipsam verò AB in F, & iungatur AK, differentia igitur segmentorum HI, IB, erit KB, sunt * enim æquales HI, IK. & quo-
3. Tertij. niam angulus AGH ad centrum rectus est ex constructione, erit angulus AKH ad circumferentiam semirectus, sed semirectus est & angulus ADB, est enim çqualis semirecto ACB, cum vterque, eidem circumferentiæ AB insistat, ergo reliquus angulus DAK, trianguli DAK rectus erit, & ideo æqualis recto BAC, dempto communi angulo CAK, reliquus DAC reliquo KAB æqualis erit, sed & latus AB æquale est lateri AC ex constructione, & latus AK æquale lateri AD ratione æqualium angulorum AKD, ADK, ergo & basis kB trianguli AKB, æqualis erit basi DC trianguli ADC; Constructum est igitur triangu-

lum GHB rectangulum in G. cuius aggregatum laterum HG, GB, æquale eſt ipſi AB, & KB differentia ſegmentorum HI, IB, æqualis ipſi DC, hoc eſt Z datæ, quod erat faciendum.

✲ In hac figura ducenda eſt linea Ak.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta, quæ poteſt duplum quadrati aggregati laterum trianguli, minus quadrato differentiæ ſegmentorum baſis ad aggregatum laterum, ita differentia ſegmentorum ad differentiam laterum, & ita aggregatum laterum ad baſim.

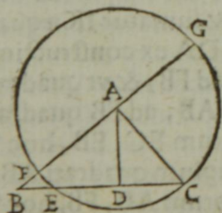
Reſumpta enim primę cõſtructionis figura, eſt vt DB ad AB, ita EB, hoc eſt KB ad FB, & ita AB ad HB, eſt enim AB ad HB, ſicut KB ad FB;

In figura ſecundæ cõſtructionis, ſimilia ſunt triangula ABD, HBA, ſunt enim anguli ADB, HAB æquales, oſtenſus eſt vterque ſemiſectus, & angulus ad B communis vtrique, vt igitur DB ad AB, ita erit AB ad HB, & ita KB ad FB, eſt enim kB ad FB, ſicut AB ad HB.

Sit kB 7, compoſita ex lateribus HG, GB 35, erit FB 5, HB 25, vnde GB 20, GH 15. Eſt enim vt L 2401, hoc eſt vt 49, ad 35, ita 7, ad 5, & ita 35, ad 25.

LEMMA

DIFFERENTIA ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, minor eſt quam recta, quæ poteſt duplum quadrati differentiæ laterum.



Sit triangulum ABC rectangulum in A, in quo perpendicularis AD, ſecet baſim BC, in duo ſegmenta inæqualia, BD, DC, & centro A, interuallo AC, quod ſit minus latus, deſcribatur circulus CEF, ſecans baſim BC in E, latus verò AB productum in punctis F, G, erit igitur laterum AB, AC differentia BF, differentia verò ſegmentorum BD, DC ipſa BE, ſunt enim ED, DC, * æquales; Dico ipſam BE minorem eſſe quam recta quæ poteſt duplum qua- 3. Tertij

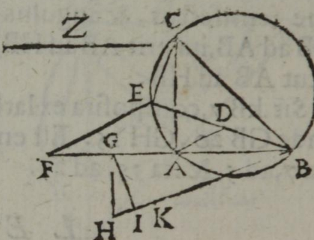
drati BF. Quoniam enim eſt BC ad BG, ſicut BF ad BE, erit vt quadratum BC ad quadratum BG, ita BF quadratum ad quadratum BE, & duplatis antecedentibus, erit vt duplum quadrati BC ad quadratum BG, ita duplum quadrati BF ad quadratum BE, ſed oſtenſum *eſt quadratum BG minus eſſe duplo quadrati BC, ergo & quadratum BE duplo quadrati BF minus erit, quare & recta BE minor erit quam recta, quæ poteſt duplum quadrati BF, quod erat demonſtrandum.

In ſecunda parte Lem. ante Prob. 7.

Problema IX.

DATA differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, & differentia laterum; inuenire triangulum.

Sit data differentia ſegmentorũ baſis angulum rectum ſubtendentis Z, & differentia laterum AB. Oportet inuenire triangulum. Ponatur ipſi AB, æqualis & ad angulos rectos AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, ex antecedente igitur Lemmate, CB maior eſt quam Z: ideoque in circulo circa diametrũ CB deſcripto, poterit aptari recta linea ipſi Z æqualis, aptetur, & ſit BE, & iungatur EC, cui æqualis ſumatur BD, & iungatur quoque DA, & ei parallela agatur EF, ſecans BA continuatam in F, & ſecetur FA biſariam in G, à perpendiculari GH æquali ipſi GA, vel GF, & iungatur HB: triangulum igitur GHB rectãgulum eſt in G, & differentia laterum GH, GB eſt ipſa AB data. Iam agatur ipſi HB perpendicularis GI, & ſumatur IK æqualis IH, Quoniam igitur parallelæ ſunt EF, DA ex conſtructione, erit vt DB, hoc eſt EC, ad EB, ita AB, ad FB, & vt quadratum EC ad quadratum EB, ita quadratum AB, ad FB quadratum, & componendo vt ſumma quadratorum EC, EB, hoc* eſt vt quadratum CB, ſeu quod idem eſt duplum quadrati AB, ad quadratum EB, ita erit ſumma quadratorum AB, FB, hoc* eſt duplum quadratorum FG, GB, vel GH, GB ad quadratum FB, & ſubduplatis antecedentibus, erit vt quadratum AB, ad quadratum EB, ita ſumma quadratorum GH, GB, hoc eſt qua-

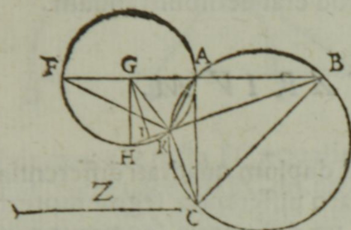


47. Primi

10. Secũdi.

dratum

dratum HB, ad FB quadratum: quare vt AB, ad EB, hoc est ad Z, ita erit HB, ad FB, sed vt HB, ad FB, ita est AB, ad KB, ergo vt AB ad Z, ita erit AB, ad KB, æquales igitur erunt KB, & Z. Constructum est igitur triangulum GHB rectangulum ad G, cuius laterum GH, GB differentia est ipsa AB data, & KB differentia segmentorum HI, IB æqualis datæ Z, quod facere oportebat.



ALITER Inclinentur, vt prius ad angulos rectos AB, AC æquales, & iuncta BC fiat diameter circuli, in quo accõmodetur ipsi Z ęqualis BK: est autem ex antecedente Lemmate diameter BC maior quã Z, & conectatur AK, cui perpẽdicularis ducatur kF. Quoniam igitur angulus FAk minor est recto FAC, & angulus AkF rectus, erunt ambo simul duobus rectis minores, quare coibunt rectæ BA, kF: coeant in F, & circa diametrum FA describatur circulus cuius centrum G, is igitur circulus transibit per k, quoniam rectus est angulus AkF. Deinde producatur Bk donec secet circulum AkF, in H: inferius autem demonstrabimus rectam Bk secare circulum, non autem contingere, & iuncta GH, ducatur ipsi HB perpendicularis GI. Quoniam igitur HI, Ik sunt æquales, differentia segmentorum HI, IB, erit kB, cui æqualis est Z data. Similiter differentia laterum GH, GB est ipsa AB data, superest igitur vt angulus HGB sit rectus, id autem ita fit manifestum.

Quoniam enim semirectus est angulus AkB (est enim æqualis semirecto ACB, vterque eidem circumferentiæ AB insistit) est autem AkF, rectus ex constructione, reliquus FkH semirectus erit: tres enim anguli AkB, AkF, FkH duobus rectis sunt æquales, & quoniam angulus FGH ad centrum duplus est anguli FkH ad circumferentiam, & est semirectus FkH, erit angulus FGH rectus, quare & HGB rectus quoque erit; Constructum est igitur triangulum GHB rectangulum in G, cuius laterum GH, GB differentia est ipsa AB data, & kB differentia segmentorum HI, IB æqualis ipsi Z, quod erat faciendum.

At verò rectam Bk secare circulum, ita demonstrabitur. Si enim non secat, tangit: tangat si possibile est, contactus igitur erit in k, & angulus GkB, erit rectus, sed semirectus est AkB,

quia

quia æqualis eſt ſemirecto A C B, ergo & reliquus AkG ſemirectus erit, ſed angulo AkG æqualis eſt angulus GAk, ratione æqualium laterum GA, Gk, ergo & ipſe GAk ſemirectus erit, ablato igitur ſemirecto angulo G A k à recto G A C, reliquus KAC erit ſemirectus, ſed ipſi kAC æqualis eſt kBC, ſunt enim in eadem portione circuli, ergo & ipſe kBC ſemirectus erit, quare ſemirecto ABC æqualis, quod eſt abſurdum; non igitur Bk tangit circulum, ſed ſecat, quod erat demonſtrandum.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta, quæ poteſt duplum quadrati differentiæ laterum trianguli minus quadrato differentiæ ſegmentorum baſis, ad differentiam laterum, ita differentia ſegmentorum ad aggregatum laterum, & ita differentia laterum ad baſim.

Reſumpta enim primæ conſtructionis figura, eſt vt D B, ad BA, ita EB ad BF, hoc eſt vt EC, ad BA, ita Bk, ad BF, & ita AB, ad BH, eſt * enim eadem ratio AB ad BH, quæ kB ad BF.

In ſecunda conſtructionis figura, iuncta k C, ſimilia erunt triangula A k C, F k B, nam angulus A C k æqualis eſt angulo A B k, quia in eadem ſunt portione circuli, & quoniam recti ſunt anguli CkB, AkF, hic ex conſtructione, ille ex vi ſemicirculi, & ideo æquales, addito communi angulo AKB, totus angulus AKC toti FKB æqualis erit, ac reliquus reliquo, vt igitur KC, ad CA, vel ad AB, ita erit KB ad FB, & ita AB, ad BH, eſt * enim AB ad BH, ſicut KB ad BF.

Ex Lem. in prob. 8

Sit AB 91, KB 119, erit FB 221, HB 169, vnde GB 156, GH 65.

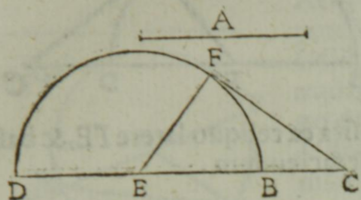
Eſt enim vt L 2401, hoc eſt vt 49, ad 91, ita 119, ad 221, & ita 91, ad 169.

Problema X.

D*ATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & baſim, inuenire triangulum.*

Sit

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus A, data quoque differentia inter reliquum latus, & basim BC. Oportet inuenire triangulum. Fiat quadrato A æquale rectangulum BCD, & circa diametrum DB describatur circulus cuius centrum E, ipsum autem circulum contingat recta CF in F, & iungatur EF, erit igitur rectangulum BCD æquale quadrato FC, sed æquale est & quadrato A ex constructione, quadratum igitur FC quadrato A æquale erit, quare & recta FC æqualis rectæ A. Est autem * & angulus EFC rectus, & basis EC differt à latere EF per BC, æquales enim sunt EF, EB ex definitione circuli. Constructum est igitur triangulum EFC, quale construendum proponebatur. 18 Tertij



CONSECTARIVM.

Itaque, alterum ex duobus lateribus trianguli angulum rectum ambientibus medium est proportionale inter differentiam & aggregatum reliqui lateris, & basis.

Quoniam enim rectangulum BCD ęquale est quadrato FC, erit vt BC ad FC, ita FC, ad DC.

Sit FC 12, BC 6, erit DC 24, vnde EC 15, EF 9, Est enim vt 6, ad 12, ita 12, ad 24.

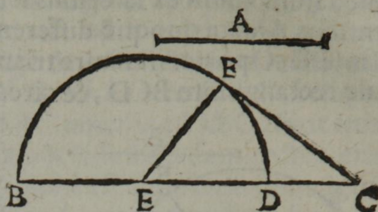
Problema XI.

DATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, & aggregato reliqui lateris, & basis, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus A, datum quoque aggregatum reliqui lateris, & basis BC, oportet inuenire triangulum. Secetur BC in D, vt rectangulum BCD sit æquale quadrato A, & circa diametrum BD circulus describatur cuius centrum E, à puncto autem C ducatur CF circulum contingens in F, & iungatur EF. Quoniam igitur CF contingit circulum in F, rectangulum BCD,

æquale

æquale erit quadrato FC, ſed æquale eſt & quadrato A, ex conſtructione, ergo quadratum FC quadrato A, æquale erit, vnde & recta FC æqualis erit rectæ A. Conſtructum eſt igitur triangulum EFC rectangulum in F, cuius latus FC æquale eſt ipſi A, & compoſita ex reliquo latere FE, & baſe EC æqualis BC datæ, quod erat faciendum.



CONSECTARIVM.

Itaque alterum ex duobus lateribus trianguli angulum rectum ambientibus medium eſt proportionale inter differentiam, & aggregatum reliqui lateris, & baſis.

Quoniam enim rectangulum BCD æquale eſt quadrato FC, erit vt BC, ad FC, ita FC, ad DC.

Sit FC 12, BC 24, erit DC 6, vnde EC 15, EF 9, Eſt enim vt 24, ad 12, ita 12, ad 6.

Sex Problemata proximè præcedentia propoſita ſunt de triangulo rectangulo tantum, ſex verò quæ ſequuntur proponuntur de omni triangulo.

Problema XII.

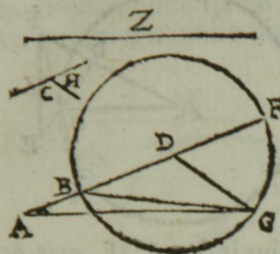
D*ATA baſe trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.*

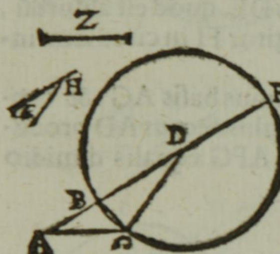
Sit data baſis trianguli Z, differentia laterum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur iam factum & ſit illud triangulum DAG, cuius baſis AG eſtò æqualis ipſi Z, & angulus ADG aduerticem æqualis angulo C, ac denique differentia laterum DA, DG, quæ ſit AB eſtò poſitione, ac magnitudine data. Quoniam igitur DA, DG differunt per AB, erunt DB, DG æquales, itaque centro D interuallo DB, vel DG deſcribatur circulus, quem ſecet AD cõtinuata in F, & iungatur BG. Quoniam igitur datus eſt angulus ADG, dabitur & angulus FDG, vt reliquus è duobus rectis, ergo dabitur quoque & angulus FBG, vt dimidius anguli FDG,

eſt

eſt enim angulus FDG ad centrum duplus anguli FBG, ad circumferentiam, ſed poſitione eſt BD, & poſitione quoque punctum B, erit * igitur poſitione & BG, & quoniam in ipſam BG à dato puncto A ducta eſt AG magnitudine data, dabitur * ipſa AG poſitione quoque, quare * & punctum G, ſed datur, & angulus DGB: ē enim ęqualis angulo DBG, æqualibus exiſtentibus DB, DG: ergo dabitur * GD poſitione, quare * & punctũ quoque D dabitur. Quoniam igitur datæ ſunt poſitione extremitates A, D, G, datarum poſitione AD, DG, ipſæ quoque * magnitudine datæ erunt. 29. Datorum 31 Dat. 25. Dat. 29. Dat. 25. Dat. 26. Dat.



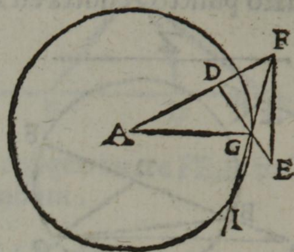


Componetur autem ſic. Producatur AB in F, & fiat angulus FBG æqualis dimidio eius, quem relinquit è duobus rectis angulus C: hoc eſt dimidio anguli H, & in BG ponat AG æqualis Z, & angulo GBD ęqualis conſtituatur angulus BGD, erunt igitur æquales DB, DG, quare differentia laterũ DA, DG trianguli DAG, erit ipſa AB data. Deſcribatur ex D centro ad interuallum DG, vel DB, circulus, quē ſecet AF in F, erit igitur angulus FDG ad centrum, duplus anguli FBG ad circumferentiam, ſed eiuſdem anguli FBG duplus eſt quoque & angulus H ex conſtructione, ergo angulus FDG angulo H æqualis erit, vnde & angulus ADG ad verticē trianguli æqualis angulo C: eſt autem & baſis AG æqualis datæ Z ex conſtructione. Conſtructum eſt igitur triangulum DAG, quod facere oportebat.

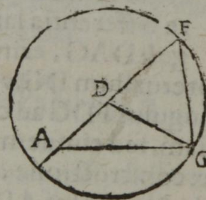
LEMMA

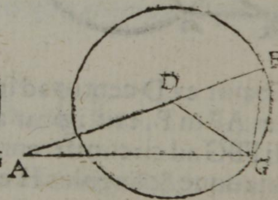
SI angulus trianguli fuerit centrum circuli, baſis verò ſemidiameter, & ducatur linea recta non ex centro circuli, ſed ab altera extremitate aggregati laterum, conſtituēs cum eo angulum æqualē dimidio, qui eſt ad verticem trianguli, angulo, illa recta linea in circulum incidet.

Sit triangulum DAG cuius basis AG, & centro A, interuallo AG, describatur circulus, & producatur AD in F, vt sit DF æqualis DG, aggregatum igitur laterum AD, DG erit AF: à puncto autem F ducatur FI, faciens angulum AFI, ęqualem dimidio anguli ADG; Dico ipsam FI in circulum incidere, si enim non incidit, cadit extra qualis est FE, itaque continuetur DG, donec secet ipsam FE in E. Quoniam igitur externus angulus ADE trianguli DFE, æqualis est duobus internis DFE, DEF, quorum vnus nempe DFE, ponitur dimidius ipsius ADE, erit & reliquus DEF ipsius ADE dimidius: ęquales igitur erunt anguli DFE, DEF, & ideo æquales rectæ DF, DE, quod est absurdũ, ponitur enim DF æqualis DG, Recta igitur FI in circulum incidet, quod erat demonstrandum.



ALITER. Sit triangulum, DAG cuius basis AG, & centro D, interuallo DG, describatur circulus, secans AD productam in F, & iungatur FG, erit angulus AFG æqualis dimidio anguli ADG hic enim est ad centrũ, ille ad circumferentiam. Si igitur ex A centro ad interuallũ AG circulus describatur, ipsũ tanget, vel secabit recta linea FG, ideoque in ipsum circulum incidet, quod erat demonstrandum.





Problema XIII.

Prob. 13. lib. 2. Regiomontani de triãgulis.

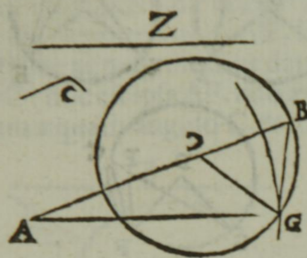
DATA base trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

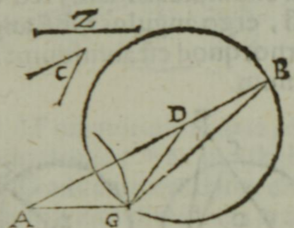
Sit data basis trianguli Z, aggregatum laterum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum DAG, cuius basis AG estò æqualis ipsi Z, aggregatum verò laterum AD, DG, æquale ipsi

ipsi AB, magnitudine ac positione datæ, & angulus ADG ad verticem æqualis angulo C, iungatur autem BG. Quoniam igitur composita ex AD, DG æqualis est ipsi AB, ablata communi AD, reliqua DG reliquæ DB æqualis erit, & ideo circulus ex D centro descriptus ad interuallum DG, transibit per B: describatur, erit igitur angulus ADG ad centrum, duplus anguli B ad circumferentiam, sed datur angulus ADG, ergo dabitur & angulus B, & est positione AB, ergo * & BG positione erit, sed in ipsam BG à dato puncto A ducta est AG magnitudine data, ergo dabitur * ipsa AG positione quoque, & datum * erit punctum G, & data * quoque positione GD, datur enim angulus DGB, quia æqualis est dato DBG æqualibus existentibus DB, DG, quare & punctum D dabitur. Quoniam igitur datæ sunt extremitates A, D, G, datarum positione, AD, DG ipsæ quoque magnitudine datæ erunt.

29. Dat.
31. Dat.
25. Dat.
29. Dat.





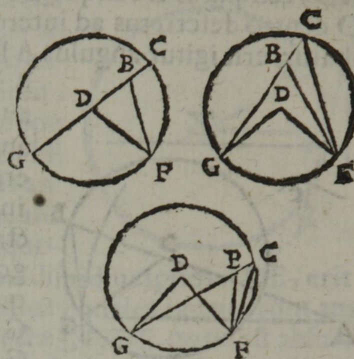
Componetur autem Problema, hoc modo. Centro A, interuallo datæ Z æquali, describatur circulus, & fiat angulus ABG æqualis dimidio anguli C, ex antecedente igitur Lemmate, recta BG incidet in circulum sub A centro descriptum, incidat in G, & iungatur AG, & fiat angulo B æqualis angulus BGD, erit igitur DG æqualis DB, addita communi AD, composita ex AD, DG, erit æqualis AB. Centro autem D, interuallo DB, vel DG describatur circulus BG, erit igitur angulus ADG ad centrum duplus anguli B ad circumferentiam, sed & angulus C duplus est anguli B ex constructione, ergo angulus ADE angulo C æqualis erit, est autem & basis AG æqualis datæ Z ex constructione. Constructum est igitur triangulum DAG quale construendum proponebatur.

LEMMA.

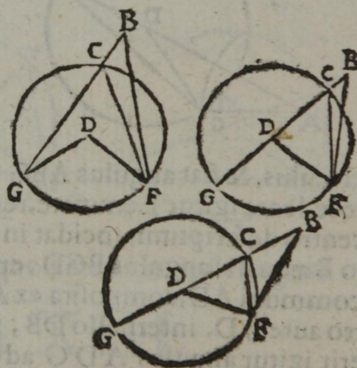
Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ cir-

culi insisterint, duplus autem, fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit.

Insistant duo anguli GDF, GBF eidem circuli circumferentiæ GF, & sit angulus GDF ad centrum circuli, atque duplus anguli GBF, Dico angulum GBF ad circumferētiam esse. Si enim non est ad circũferentiam, erit intra circulũ, vel extra. Sit primum si fieri potest, intra circulum, & producatur GB vsque ad circumferentiam in C, & iungatur FC, erit igitur angulus GDF ad centrum, duplus anguli GCF ad circumferentiam, sed duplus est & anguli GBF ex hypothesi, ergo angulus GBF angulo GCF æqualis erit, externus interno, quod est absurdum: angulus igitur GBF non est intra circulum.



Deinde sit angulus GBF extra circulum, ipsum igitur circulum secabit, vel vtraque rectarũ GB, FB, vel saltem vna: secet ipsa GB in puncto C, & iungatur FC, erit igitur angulus GDF, ad centrum, duplus anguli GCF ad circumferentiam; sed duplus est & anguli B ex hypothesi, ergo angulus GCF angulo B æqualis erit, externus interno, quod est absurdum: angulus igitur GBF non est extra circulum, sed neque intra circulum vt est ostensum, ergo ad circumferentiam erit, quod erat demonstrandum.



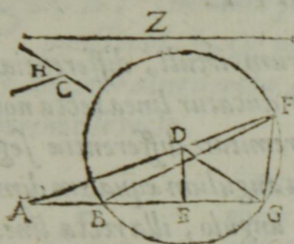
Problema XIV.

DATA differentia segmentorum basis trianguli, aggregato laterũ, & angulo verticis, inuenire triangulũ.

Sit

Sit data differentia ſegmentorum baſis trianguli AB, aggregatum laterum Z, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Inuentum iam ſit, & ſit illud triangulum DAG in quo perpendicularis DE, & centro D, interuallo DG, quod ſit minus latus, deſcribatur circulus, ſecans latus AD productum in F, ba-
ſim verò AG in B, erunt *igitur BE, EG æquales, vnde diffe- 3. Tertij.
rentia ſegmentorum AE, EG erit AB: eſtò igitur ipſa AB poſitione ac magnitudine data, compoſita verò ex lateribus AD, DG: hoc eſt ipſa AF, eſtò æqualis Z, & angulus ADG ad verticem æqualis angulo C, & iungantur BF, FG. Quoniam igitur datur angulus ADG, dabitur & angulus FDG, vt reliquus è duobus rectis, & dabitur quoque angulus FBG, vt dimidius anguli FDG: angulus enim FDG ad centrum, duplus eſt anguli FBG ad circumferentiam, poſitione
igitur * erit BF, quia poſitione 29. Dat.
eſt & AB, & quoniam datum eſt punctum A, à quo in BF ducta
eſt AF magnitudine data, dabitur * ipſa AF poſitione quoque, 31. Dat.
vnde dabitur * & punctum F, & quoniam datus eſt angulus 25. Dat.
ADG ad centrum, datus erit & angulus AFG ad circumferen-
tiam, vt eius dimidius, atque data * erit poſitione FG, vnde 29. Dat.
datum * erit & punctum G & data * quoque poſitione GD,
quia datus eſt angulus DGF: etenim æqualis eſt dato angulo 25. Dat.
29 Dat.
DFG, ratione æqualium laterum DG, DF, quare datum * erit 25. Dat.
& punctum D. Quoniam igitur datæ ſunt extremitates A, D, G, datarum poſitione, AD, DG, AG ipſæ quoque magnitudine datæ erunt.



Componetur autem hoc modo. Producatur AB in G, & fiat angulus GBF æqualis dimidio eius, quem relinquit è duob. rectis angulus C, hoc eſt dimidio anguli H, & in BF ponatur AF æqualis Z, & fiat angulus AFG æqualis dimidio anguli C, angulus verò FGD æqualis angulo AFG, erunt igitur æquales DG, DF: addita communi AD compoſita ex lateribus AD, DG trianguli DAG, æqualis erit ipſi AF, hoc eſt Z datæ.

Deinde centro D, interuallo DG vel DF, deſcribatur circulus FE. Quoniam igitur angulus C duplus eſt anguli AFG ex conſtructione, ſimiliter & angulus ADG ad centrum duplus

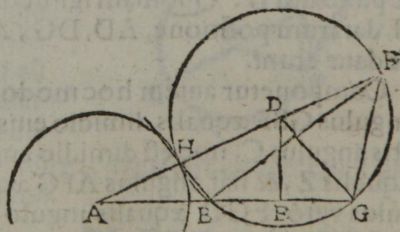
eiuſdem

eiusdem anguli AFG ad circumferentiam, erit angulus ADG aduerticem dato angulo C æqualis, quare & angulus FDG angulo H, sed angulus H duplus est anguli FBG ex constructione, ergo & angulus FDG eiusdem anguli FBG duplus erit, sed angulus FDG est ad centrum, & insistit circumferentiæ FG, cui etiam & angulus FBG insistit, ergo ex antecedente Lemmate, angulus FBG ad circumferentiam erit. Iam agatur ipsi
3. Tertij. AG perpendicularis DE, erunt igitur *æquales BE, EG, & ideo differentia segmentorum AE, EG erit ipsa AB data. Constructum est igitur triangulum DAG, vt facere oportebat.

LEMMA I.

SI angulus trianguli fuerit centrum circuli, differentia verò laterum semidiameter, & ducatur linea recta non ex centro circuli, sed ab altera extremitate differentiæ segmentorum basis, constituens cum ea angulum æqualem dimidio; qui est ad verticem trianguli, angulo, illa recta linea circulum secabit.

Sit triangulum DAG, in quo perpendicularis DE secet basim AG in E, & centro D, interuallo DG, quod sit minus latus, describatur circulus secans latus AD productum in punctis H, F, basim verò AG in B; laterum igitur DA, DG differentia erit AH, differentia verò segmentorum AE, EG erit AB, iungantur autem BH, FG. Quoniam igitur quadrilaterum FGBH est in circulo, anguli HBG, HFG ex aduerso, duobus rectis sunt æquales, sed & anguli HBG, HBA æquales sunt duobus rectis, ergo anguli HBG, HFG angulis HBG, HBA æquales erunt, dempto communi angulo HBG, reliquus HFG, reliquo HBA æqualis erit, sed angulus HFG ad circumferentiam dimidius est anguli HDG ad centrum, ergo & angulus HBA, eiusdem anguli ADG dimidius erit, Dico igitur circulum sub A centro, interuallo



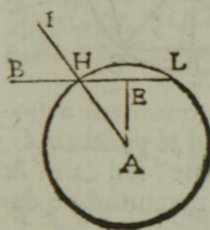
uallo AH descriptum, secari à BH: manifestum est autem ipsam BH in eum incidere, quoniam punctum H est in circumferentia, si igitur eum non secat, tangit, tangat si fieri potest, contactus erit in H, & iungatur BF, ergo rectus * erit angulus AHB, & ideo æqualis recto HBF, qui est in semicirculo; quare parallelæ * erunt AF, BF, quod est absurdum, conueniunt enim in F. Non igitur BH tangit circulum, cuius centrum A, sed secat, quod erat demonstrandum.

18. Tertij

27. Primi

LEMMA II.

SECET circulum sub A centro recta linea B H L, in punctis H, L, & per punctum H, quod sit propius ad B, ducatur altera recta A H I. Dico angulum I H B minorem esse recto.



Diuidatur enim HL bifariam in E, & iũgatur AE, rectus igitur erit angulus AEH, ac proinde angulus EHA recto minor: tres enim interni anguli trianguli A E H duobus rectis sunt æquales, sed angulus E H A, æqualis est angulo IHB: sunt enim ad verticem, ergo & angulus IHB, erit recto minor, quod erat demonstrandum.

Problema XV.

DATA differentia segmentorum basis trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

Prob. 20. lib. 2. Regiom. de triãgulis.

Sit data differentia segmentorum basis trianguli AB, differentia laterum Z, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum DAG, in quo perpendicularis DE, & centro D, interuallo DG, quod sit minus latus, describatur circulus secans latus DA in H, basim verò AG in B, differentia igitur segmentorum AE, E G erit A B, differentia

verò

verò laterum DA, DG erit AH. Estò igitur AB positione atque magnitudine data, ipsa verò AH estò æqualis datæ Z, & angulus A D G ad verticem æqualis angulo C, & producatur AD vsque ad circumferentiam in F, & iungantur HB, BF, FG. Quoniam igitur quadrilaterum F G B H est in circulo, anguli HBG HFG ex aduerso, duobus rectis erunt æquales: sed & anguli HBG, HBA duobus rectis sunt æquales, ergo anguli HBG, H F G angulis H B G, H B A æquales erunt: auferatur vtrinque angulus HBG, reliquus igitur HFG reliquo HBA æqualis erit, sed angulus ADG ad centrum, duplus est anguli AFG ad circũferentiam, ergo & anguli HBA duplus erit angulus ADG, sed
29. Dat. datur angulus A D G, dabitur ergo & H B A, quare dabitur * BH positione, & quoniam à dato puncto A in ipsam BH ducta est A H magnitu-
31. Dat. dine data, dabit * AH positione quoque, & propter datum angulum H B F: est enim rectus in semicirculo, data * erit B F positio-
29. Dat. lo, data * erit B F positio-
25. Dat. ne, & datũ * quoque pun-
26. Dat. ctum F, & ideo data * magnitudine H F, & quoniam æquales sunt H D, DF, dabitur punctum D, sed datur & punctum G,
26. Dat. ergo dabitur D G * positione, & magnitudine, sed datur &
26. Dat. punctum A, ergo & AD, AE positione * & magnitudine datæ erunt.

Componetur autem sic. Centro A, interuallo rectæ Z æquali, describatur circulus, & fiat angulus ABH æqualis dimidio anguli C, ex antecedente igitur, quod primo loco præmissum est Lẽmate, BH secabit ipsum circulum, secet in punctis H L, & per punctum H, quod sit proprius ad B, ducatur recta linea A H I, ipsi autem BH ducatur perpendicularis B F. Quoniam igitur ex antecedente, quod secundo loco præmissum est Lemmate, angulus H B minor est recto, & angulus FBH rectus: erunt ambo simul duobus rectis minores, & ideo coibunt rectæ lineæ AI, BF, coeant in F,

&

& secetur H F bifariam in D, & centro D, interuallo D H, vel D F, describatur circulus, eius circumferentia transibit per B, propter angulum HBF rectum. Deinde producatur AB donec secet circulum FBH in G, & iungantur DG, FG, & ipsi AG ducatur perpendicularis DE, erunt igitur æquales BE, EG, & ideo differentia segmentorum AE, EG, erit ipsa AB data. Similiter quoniam æquales sunt D H, D G vt semidiametri, differentiæ laterum AD, DG erit AH, cui æqualis est Z data ex constructione. Superest igitur vt angulus A D G aduerticem trianguli DAG æquetur angulo C, id autem ita fit manifestum. Quoniam enim quadrilaterum F G B H est in circulo, anguli H B G, H F G ex aduerso duobus rectis erunt æquales, sed & anguli H B G, H B A sunt æquales duobus rectis, ergo anguli H B G, H F G angulis H B G, H B A æquales erunt: dempto communi angulo HBG, reliquus HFG reliquo HBA æqualis erit, sed anguli H F G ad circumferentiam duplus est angulus H D G ad centrum, ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, sed & angulus C duplus est anguli H B A ex constructione, ergo angulus A D G angulo C æqualis erit, quod ostendisse oportuit; Constructum est igitur triangulum D A G, quale construendum proponebatur.

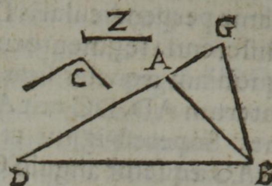
Problema XVI.

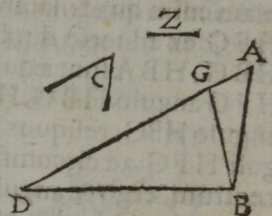
DATO vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & basim, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus, AB: differentia inter latus reliquum & basim, Z, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum ABD, cuius latus AB esto positione ac magnitudine datum, differentia verò inter reliquum latus AD, & basim DB esto æqualis ipsi Z, & angulus D A B ad verticem æqualis angulo C. Ponatur autem D G æqualis DB, differentia igitur ipsarum AD, DB erit A G, & iungatur G B. Quoniam igitur datus est angulus DAB, datus erit & angulus G A B, vt reliquus è duobus rectis, hic autem in prima figura ad primum casum pertinens, in secunda verò figura,

quę ad ſecundum caſum pertinet, angulus DAB idem eſt quod angulus GAB, quocunque igitur caſu datur angulus G A B: eſt
29. Dat. autem poſitione AB, ergo * poſitione eſt & AG, ſed & magni-
27. Dat. tudine, ponitur enim æqualis ipſi Z, ergo * punctum G datum
26. Dat. erit, ſed datum eſt & B, ergo * GB poſitione erit, & magnitudine, atque adeo dabitur angulus A G B, quia da-
39. Dat. tur * triangulum AGB ſpecie, & in ſecũda figura dabitur quoque & D G B, vt reliquus è duobus rectis, itaque in vtraque figura dabitur angulus DBG, eſt enim æqualis ipſi DGB, æqualibus
29. Dat. exiſtentibus DG, DB, quare * BD po-
25. Dat. ſitione erit, & ideo * poſitione quo-
26. Dat. que, & punctum D, ac propterea * ipſæ BD, A D magnitudine quoque datæ erunt.





Componetur aũt hoc modo. Conſtituatur angulo C, æqualis angulus BAD, & ponatur ipſi Z æqualis A G, & iungatur G B, & angulo D G B æqualis conſtituatur angulus G B D, & B D occurrat ipſi A D in D, erunt igitur D G, D B æquales, & ideo differentia inter latus AD, & baſim DB trianguli ABD, erit AG, hoc eſt Z data: eſt autem & angulus DAB ad verticem, æqualis angulo C ex constructione, & latus A B ipſum datum. Constructum eſt igitur triangulum ABD, vt facere oportebat.

Problema XVII.

DATO vno ex lateribus tranguli datum verticis angulum ambientibus, datóque aggregato reliqui lateris & baſis; inuenire triangulum.

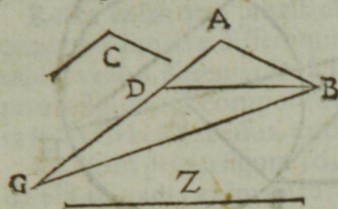
Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus A B, compoſita verò ex reliquo latere, & baſe Z, & angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur iam factum & ſit illud triangulum ABD, cuius latus AB eſtò poſitione ac magnitudine datum, compoſita verò ex reliquo latere A D, & baſe D B eſtò æqualis ipſi Z, & angulus

aduerti-

aduerticem A æqualis angulo C. Producatur autem AD in G, vt sit DG æqualis DB: erit igitur AG çqualis compositæ ex AD, DB, & iungatur GB. Quoniam igitur positione est AB, & datus est angulus A, erit AG * positione data, sed data est & magnitudine, ergo & * punctum G datum erit, datur autem & B, dabitur, * ergo GB positione, & magnitudine, atque adeo dabitur & angulus G, quia triangulum * ABG datur specie; est autem angulo G æqualis angulus GBD, ratione æqualiũ DB, DG, quare & ipse GBD datus erit, positione igitur * erit BD, quare & * punctum D. Quoniam igitur positione datarũ DB, DA dati sunt termini A, D, B, ipsæ magnitudine quoque datæ erunt.

29. Dat.
27. Dat.
26. Dat.
39. Dat.
29. Dat.
25. Dat.



Componetur autem sic, angulo C cõstituatur æqualis angulus BAG, & ponatur AG æqualis ipsi Z, & iuncta GB, constituatur quoque angulus GBD æqualis angulo G, erunt igitur DB, DG æquales, addita communi DA, composita ex latere AD, & base DB trianguli ABD, æqualis erit ipsi AG, hoc est Z datæ: est autem & angulus aduerticem A æqualis angulo C ex constructione, & latus AB ipsum datum. Constructum est igitur triangulum ABD, quod facere oportebat.

Problema XVIII.

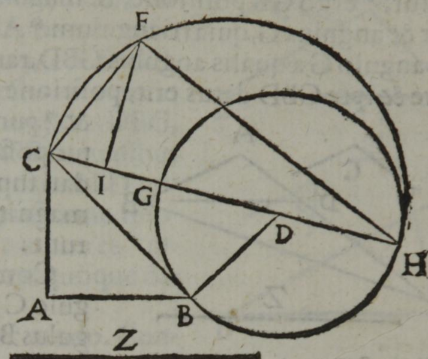
DATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataque differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

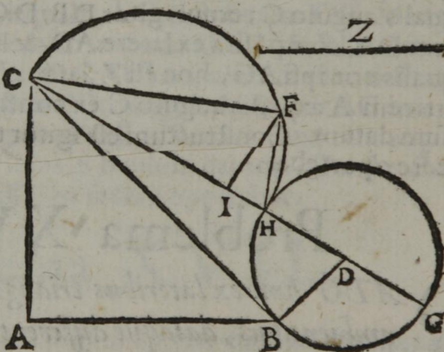
Hoc Problema duos casus habet propter duplicem lateris dati conditionem: latus enim datum intelligitur interdum minus duorum, interdum maius, ad primum igitur casum prima figura pertinet, ad secundum secunda.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus AB, data quoque differentia segmentorum basis Z. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, AC æquales, & conectatur CB, cui perpendicularis ducatur BD & æqualis dimidiæ Z, & conectatur quoque CD, &

centro D, interuallo DB deſcribatur circulus GBH, ſecans CD productam in punctis G, H, is igitur circulus tanget rectam CB in B. Deinde circa diametrum CH deſcribatur alius circulus, cui inſcribatur CF æqualis AB, & iungatur FH, & ipſi CH ducatur perpendicularis FI. Quoniam igitur CB tangit circulum GBH in B, rectangulum GCH æquale erit quadrato CB, ſed quadratũ CB duplũ eſt quadrati AB, hoc eſt quadrati CF, ergo & rectangulum GCH quadrati CF duplum erit, ſed quadrato CF æquale eſt rectangulum ICH, eſt enim* CF media proportionalis inter IC, CH: rectangulum igitur GCH duplũ erit rectanguli ICH, atque adeo CG dupla erit ipſius CI, vnde CI, IG erunt æquales; itaque differentia ſegmentorũ CI, IH erit CH, hoc eſt Z data, eſt autem & latus FC æquale ipſi AB ex cõſtructione, & angulus CFH in ſemicirculo rectus; Triangulum igitur FCH problemati ſatisfacit, quare factum eſt quod oportebat.

Ex coroll. 826.





At verò diametrum CH maiorem eſſe quam AB, in prima figura manifeſtum eſt, in ſecunda verò ſic demonſtrabitur.

Sit ſi fieri poteſt diameter CH non maior quam AB, ergo CG minor erit quam AB dupla: eſt enim HG, hoc eſt Z minor quam AB, quia differentia ſegmentorum baſis trianguli minor eſt latere maiori, quare rectangulum HCG minus erit rectangulo ſub AB, & altera ipſius dupla, hoc eſt duplo quadrati AB, ſed duplum quadrati AB æquale eſt quadrato CB, ergo rectangulum HCG minus erit quadrato CB, quod eſt abſurdum,

ſurdum, oſtenſum enim eſt in elementis ipſi æquale. Diameter igitur CH maior eſt quam AB, quod erat demonſtrandum.

CONSECTARIVM.

Primo igitur caſu, compoſita ex dimidia differentia ſegmentorum baſis, & ea quæ poteſt duplum quadrati lateris dati, plus quadrato dimidiæ differẽtiæ, æqualis eſt baſi trianguli quæſiti.

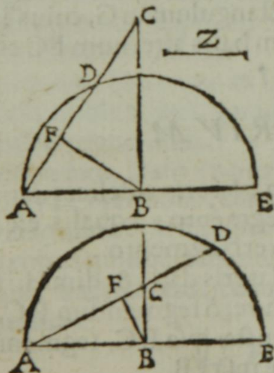
Secundo caſu, exceſſus quo prædicta potens ſuperat dimidiam ſegmentorum differentiam, æqualis eſt quæſitæ baſi.

Recta enim quæ poteſt duplum quadrati lateris dati, plus quadrato dimidiæ differentiæ ſegmentorum baſis eſt CD, dimidia verò differentia DH, baſis autem CH trianguli FCH in prima figura, eſt compoſita ex CD, DH, in ſecunda verò figura baſis CH eſt exceſſus, quo CD ſuperat ipſam DH.

Sit FC in prima figura 30, GH 14, vel DH 7, erit CH 50, vnde FH 40, radix enim quadrati 1849, quod conſtat duplo quadrati ex 30, & quadrato ex 7, eſt 43, cui ſi addatur 7, fiet 50, probaſe CH.

In ſecunda figura ſit FC 40, HG 14, vel HD 7, erit CH 50, vnde FH 30, radix enim quadrati 3249, quod conſtat duplo quadrati ex 40, & quadrato ex 7, eſt 57, exceſſus igitur quo 57, ſuperat 7, erit 50, probaſe CH.

ALITER idem Problema hoc modo abſoluetur. Iiſdem datis, quæ prius. Duplicetur AB in E, & in AE deſcribatur ſemicirculus, & ducatur ipſi AE perpendicularis BC indefinita, in ipſa autem BC ponatur AC ſecans ſemicirculum in D, ita vt CD fiat æqualis ipſi Z: hoc enim fieri poſſe demonſtrauimus in Apollonio rediuiuo, caſu quarto, & tertio ſecundi Problematis. Denique ipſi AC ducatur perpendicularis BF, erunt igitur AF, FD æquales, & ideo differentia ſegmentorum AF, FC erit CD, hoc eſt Z data. Conſtructum eſt igitur triãgulum ABC rectangulum in B, cuius latus AB eſt ipſum datum, & CD differentia ſegmentorum AF, FC æqualis Z datæ, quod erat faciendum.

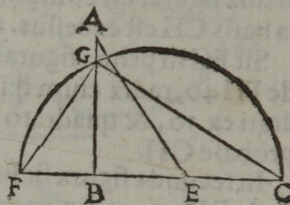


Problema

Problema XIX.

DATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, datóque alterno basis segmento, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus AB, segmentum autem basis alternum BC. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, BC, & secetur BC bifariam in E, & iungatur AE, cui æqualis ponatur EF, & in FC describatur semicirculus, quem AB secet in G, & iungantur FG, GC. Quoniam igitur secta est BC bifariam in E, & illi adiecta FB, rectangulum BFC



6. Secũdi. vnà cum quadrato BE æquale *erit quadrato FE, hoc est AE, sed quadratũ AE æquale est quadratis AB, BE, ergo rectangulum BFC vnà cum quadrato BE æquale erit quadratis AB, BE. Commune auferatur quadratum BE, reliquum

Ex coroll. igitur rectangulum BFC, hoc est quadratum GF (est enim *

8. Sexti. GF media proportionalis inter BF, FC) reliquo quadrato AB æquale erit, quare & recta GF æqualis erit rectæ AB. Constructum est igitur triangulum GFC rectangulum in G, cuius latus GF æquale est ipsi AB, & segmentum basis alternum BC est ipsum datum, quod facere oportebat.

CONSECTARIVM.

Itaque recta quæ potest quadrata, lateris videlicet dati, & dimidij segmenti, aucta dimidio segmento, æqualis est basi trianguli, diminuta verò æqualis alteri segmento.

Recta enim quæ potest quadrata lateris dati, & dimidij segmenti est AE, hoc est FE, dimidium verò segmentum EC, vel EB: basis igitur FC æqualis est FE auctæ ipsa EC, segmentum verò FB æquale eidem FE diminutæ ipsa EB.

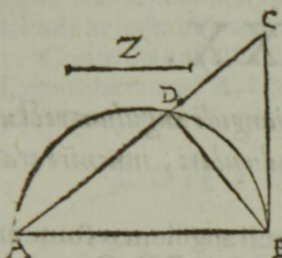
Sit latus trianguli GF 15, alternum basis segmentum BC 16, eius dimidium 8, erit basis FC 25, FB alterum segmentum 9, vnde latus GC 20. Radix enim quadrati 289, quod constat

quadra-

quadratis ex 15, & 8, est 17, cui si addatur 8, fiet 25 probase F C, si verò auferatur, relinquetur 9, pro segmento FB.

ALITER idem Problema hac ratione absoluetur.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus AB, segmentum basis alternum Z, & oporteat facere quod imperatum est. Describatur in A B semicirculus, & ducatur perpendicularis B C indefinita, in ipsa autem B C ponatur A C secans semicirculum in D, ita vt D C sit æqualis ipsi Z: hoc autem quomodo fieri possit demonstrauimus in Apollonio rediuiuo, casu quinto problematis secundi, si igitur iungatur D B, triangulum ABC, erit illud de quo quæritur, est enim rectangulum in B ex constructione, & latus A B ipsum datum, atque segmentum basis alternum DC æquale ipsi Z ex constructione, basis enim segmẽta sunt A D, D C, quia B D perpendicularis est basi A C, propter angulum ADB in semicirculo rectum, quare factum est quod oportebat.



Magni momenti essent duo problemata proximè præcedentia, si in omni triangulo non in rectangulo tantum construerẽtur, primum enim opportunum esset ad sectionem cuiuslibet anguli rectilinei, vel circumferentiæ in tres partes æquales, secundum verò ad duplicationem cubi. Proponerentur illa duo problemata hoc modo.

Primum, Dato vno ex lateribus trianguli datum angulum verticis ambientibus, dataque differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

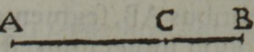
Secundum, Dato vno ex lateribus trianguli datum angulum verticis ambientibus, datoque alterno basis segmento, inuenire triangulum. Si hæc problemata construerentur, secaretur vt diximus quilibet angulus rectilineus, vel circumferentia trifariam, duplicaretur cubus, atque Geometriæ defectus supplerentur.

LEMMA.

Quadratum differentiæ duorum laterum æquale est quadratis laterum, minus duplo sub ipsis rectangulo.

Sint

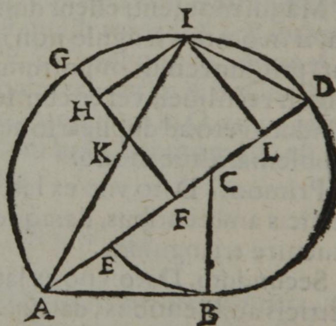
Sint duo latera AB, CD quorum differentia AC. Dico quadratum A C æquale esse quadratis A B, B C, minus duplo rectangulo A B C. Quoniam enim quadratum AC vna cum duplo rectangulo ABC * æquale est qua-
7.2.
dratis AB, CB, ablato vtrinque duplo rectangulo A B C, quadratum A C æquale erit quadratis A B, C B, minus duplo rectangulo A B C, quod erat demonstrandum.



Problema XX.

DATA differentia laterum trianguli angulum rectum ambientibus, dataque perpendiculari, inuenire trangulum.

Sit data differentia laterum trianguli angulum rectum ambientibus A B, data quoque perpendicularis B C. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, BC, & conectatur A C, & centro C, interuallo C B describatur circulus, secans A C continuatam in punctis E, D, is igitur circulus tanget ipsam AB in B: deinde fiat A D diameter alterius circuli A G D, ex cuius centro F ducatur perpendicularis F G, & sumatur F H æqualis C D, vel C B, & ipsi A D parallela agatur H I, secans circulum AGD in I, & conectantur AI, I D, & ipsi A D ducatur perpendicularis I L, & sumatur I K æqualis I D. Quoniam igitur parallelogrammum est HILF, erit I L perpendicularis trianguli IAD, æqualis HF: hoc est ipsi CB, est autem & angulus A I D in semicirculo rectus; superest igitur vt A K differentia laterum IA, I D æquetur ipsi A B, id autem ita fit manifestum.



Quoniam enim laterum IA, ID differentia est A K, quadratum A k ex antecedente Lemmate æquale erit quadratis A I, ID, minus duplo rectangulo A I D, sed quadrata AI, I D æqualia sunt

lia sunt

lia sunt quadrato A D, & duplum rectangulum A I D æquale duplo rectangulo A D, I L: est enim propter similitudinem triangulorum I A D, I L D, vt A I ad A D ita I L ad I D & ideo rectangulum A I D sub extremis, æquale rectangulo A D I L sub medijs: quadratum igitur A k æquale erit quadrato A D, minus duplo rectangulo A D, I L, hoc est minus rectangulo ADE: est enim DE dupla ipsius IL, sed quadratum A D minus rectangulo ADE idem est quod rectangulum DAE, ergo quadratum A k, æquale erit rectangulo D A E, hoc * est quadrato AB, vnde & recta A k æqualis rectæ AB, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum I A D rectangulum in I, cuius laterum I A, I D differentia A K, æqualis est ipsi AB, & perpendicularis IL æqualis BC, quod faciendum erat. 36. Tertij

CONSECTARIVM.

Itaque composita ex perpendiculari, & ea cuius quadratum æquale est quadratis differentiæ laterum, & perpendicularis æqualis est basi trianguli quæsiti.

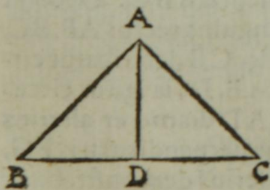
Recta enim cuius quadratum æquale est quadratis A k, I L, hoc est A B. BC est AC, composita verò ex I L, hoc est ex C D, & ex ipsa AC est AD, basis trianguli IAD.

Sit AK 5, IL 12, erit AD 25, vnde IA 20, ID 15. Radix enim quadrati 169, quod constat quadratis ex 5, & 12, est 13, cui si addatur 12, fiet 25, probase A D.

LEMMA

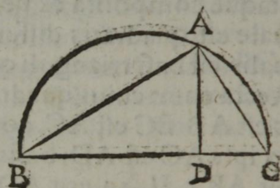
Quadratum aggregati laterum trianguli, angulum rectum ambientium, non est minus octuplo eius quod à perpendiculari fit quadrati.

Sit triangulum A B C, in quo perpendicularis A D cadat in basim BC, ab angulo recto BAC. Dico quadratũ compositæ ex B A, A C non esse minus, octuplo quadrati A D: aut enim æqualia sunt latera AB, A C, aut inæqualia, sint primum æqualia, ergo & BD, DA, DC erunt quoque æquales, & ideo quadratum A B duplum erit quadrati A D, sed



quadrati A B quadruplum est quadratum compositæ BAC, ergo quadratum ipsius BAC compositæ octuplum erit quadrati AD, non autem minus.

Sed sunto latera A B, A C inæqualia, ergo & B D, D C erunt inæquales, describatur autem in B C semicirculus B A C, eius circumferentia transibit per A, propter angulũ BAC rectum. Quoniam igitur inæquales sunt BD, D C, ipsa DA non erit ex centro circuli, & ideo BC maior erit quam AD dupla, & consequenter quadratum B C maius quadruplo quadrati A D, eadem ratione, & rectangulum B C, A D maius erit duplo quadrati AD, & consequenter duplum rectanguli BC, A D maius quadruplo quadrati A D; ergo quadratum BC, vnà cum duplo rectanguli B C, A D maiora erunt octuplo quadrati A D, sed quadratum BC æquale est quadratis A B, A C, & duplũ rectanguli B C, A D æquale duplo rectanguli B A C: est enim propter similitudinem triangulorum ABC, DAC, vt BC ad BA, ita AC ad AD, & ideo rectangulum sub extremis B C, A D æquale rectangulo B A C sub medijs: quadrata igitur BA, AC, vnà cum duplo rectanguli BAC, hoc est quadratum compositæ BAC maius erit octuplo quadrati AD, non autem minus. Quare cõstat propositum.



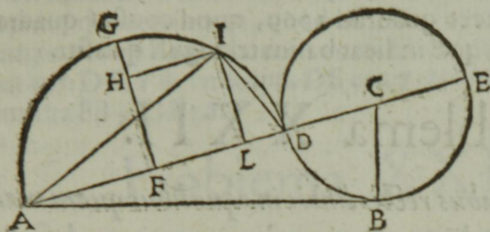
Problema XXI.

DATO aggregato laterum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari, inuenire triangulum.

Sit datum aggregatum laterum trianguli, angulum rectum ambientium A B, data quoque perpendicularis B C. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, BC, & conectatur A C, & centro C, interuallo C B describatur circulus, secans A C continuatam in punctis E, D, is igitur circulus tanget ipsam A B in B. Deinde fiat A D diameter alterius circuli A G D, ex cuius centro F ducatur perpendicularis F G, & sumatur F H æqualis C D, vel C B: inferius demonstrabitur ipsam F G non esse minorem quam B C, acta denique ipsi A D

parallela

parallela HI, secans circulum A G D in I, conectantur AI, ID, & ipsi AD ducatur perpendicularis IL, ea erit æqualis HF, hoc est ipsi B C, & angulus A I D in semicirculo rectus: reliquum igitur est vt composita ex lateribus A I, ID ostendatur æqualis ipsi AB, id autem ita fiet.



Quoniã enim quadratum compositæ AID æquale est quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectãgulo A I D, quadrata autem A I, I D æqualia sunt quadrato A D, & duplum rectangulum AID æquale duplo rectangulo AD, IL: est enim propter similitudinem triangulorum IAD, ILD, vt A I, ad AD, ita IL, ad ID, & ideo rectangulum AID sub extremis æquale rectangulo sub medijs AD, IL: quadratum igitur compositæ AID æquale erit quadrato AD, vnà cum duplo rectangulo AD, IL, hoc est vnà cum rectangulo ADE, est enim D E dupla ipsius IL, sed quadratũ AD, vnà cum rectangulo ADE, æquale est rectangulo DAE, ergo quadratum compositæ AID æquale erit rectangulo D A E, hoc est * quadrato A B, vnde & ipsa composita æqualis ipsi A B, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum IAD rectangulum in I, cuius laterum AI, ID aggregatum æquale est ipsi A B, & perpendicularis IL æqualis ipsi BC, quod erat faciendum. *36. Tertij*

At verò ipsam FG non esse minorem quam BC, ita demonstrabitur. Quoniam enim quadratum AB ex antecedẽte Lemmate, non est minus octuplo quadrati B C, quadrata A B, B C, hoc est quadratum A C non erit minus nonuplo quadrati B C; ergo & recta AC non erit minor quam tripla BC, auferatur ex AC recta DC, quæ æqualis est ipsi BC, reliqua igitur AD, non erit minor quam dupla B C, neque dimidia A D, hoc est ipsa FG minor erit, quam ipsa BC, quod erat demonstrandum.

CONSECTARIVM.

Itaque differentia inter perpendicularem, & eam cuius qua-

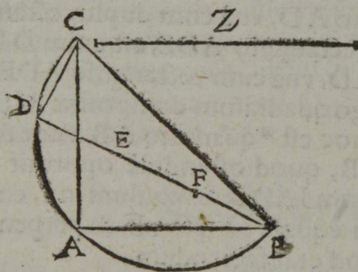
dratum æquale eſt quadratis compoſitæ ex lateribus, & perpendicularis, æqualis eſt baſi trianguli quæſiti.

Differentia enim inter perpendicularem BC, hoc eſt CD, & ipſam AC, rectam videlicet cuius quadratum æquale eſt quadratis AB, BC, eſt AD, baſis trianguli IAD.

Sit compoſita ex AI, ID, hoc eſt ipſa AB 35, IL ſeu BC 12. Erit AD 25, vnde IA 20, ID 15, differentia enim inter 12, & 37, radicem videlicet quadrati 1369, quod conſtat quadratis ex 35, & 12, eſt 25, quæ indicat baſim trianguli quæſiti.

Problema XXII.

DATIS duabus rectis lineis inæqualibus quam maior non excedat diametrum quadrati ex minore deſcripti, maiorem ita ſecare, vt partium quadrata ſimul æqualia ſint quadrato minoris.



Sint datæ duæ rectæ lineæ, Z quidem maior, AB minor. Oportet ipſam Z, in duas partes ſecare, ita vt partium quadrata, ſimul æqualia ſint quadrato AB. Ducatur ipſi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB, fiat diameter circuli CAB, in quo accommodetur BD æqualis ipſi Z, ex determinatione enim Problematis ipſa Z non eſt maior quam CB, deinde iungatur CD, cui æqualis ponatur DE, & ſecetur bifariam EB in F. Quoniam igitur BE ſecta eſt bifariam in F, & illi adiecta ED, quadrata DB, DE dupla * erunt quadratorum DF, FB, ſed quadrata DB, DE: hoc eſt DB, DC æqualia ſunt quadrato CB propter angulum CDB in ſemicirculo rectum, ergo & quadratum CB duplum erit quadratorum DF, FB, ſed duplum eſt & quadrati AB, ergo quadrata DF, FB quadrato AB æqualia erunt. Secta eſt igitur DB, cui æqualis eſt Z data in F, ita vt quadrata partium DF, FB æqualia ſint quadrato AB, quod facere oportebat.

10. Secundi.

CON-

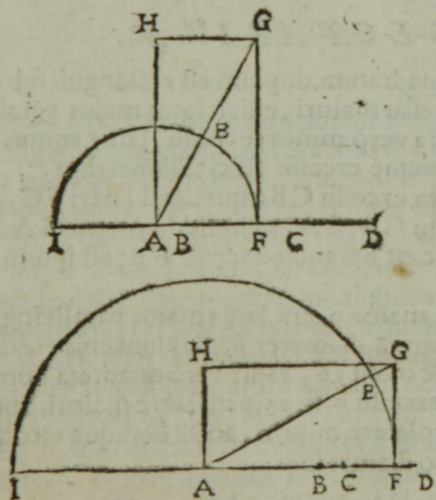
CONSECTARIVM.

Itaque excessus, quo duplum quadrati à linea minore superat quadratum à maiore, æqualis est quadrato differentiæ partium maioris.

Sit Z, vel DB 17. AB 13, erit DF 12, FB 5. Excessus enim quo duplum quadrati ex 13, quod est 338, superat quadratū ex 17, nempe 289, est 49, quadratum videlicet ipsius DE differentiæ partium D F, F B, vnde ipsa DE erit 7, reliqua verò EB 10, eius dimidia FB 5, DF 12.

Problema XXIII.

DATIS duobus excessibus quibus diameter parallelogrammi rectanguli vtrunque latus superat, inuenire parallelogrammum.



Sint dati duo excessus AB, BC, quibus diameter parallelagrammi rectanguli excedit latera. Oportet inuenire parallelogrammū. Ponātur in directum A B, BC, & fiat duplo rectanguli A B C æquale quadratum CD, & ponatur D F æqualis B C, & ipsi AD ducatur perpendicularis FG ipsi verò BD æqualis, & compleatur parallelogrammū A F G H, cuius diameter A G, & centro A, interuallo AF describatur circulus, quem secet AG in E, ipsa verò producta in I. Quoniam igitur duplum rectanguli A B C æquale est quadrato CD ex constructione, addito communi quadrato B C, vnà cum duplo rectanguli F B C, duplum rectangulorum AB C, F B C, vnà

cum

cum quadrato BC, hoc est FD, æqualia erunt quadratis BC, CD, vnà cum duplo rectanguli FBC, hoc est BCD: sunt enim BF, CD æquales, quia BC æqualis est FD, & CF vtrique communis, sed duplum rectangulorum ABC, FBC æquale est rectangulo sub BC, hoc est FD, & composita ex duplis AB, BF, hoc est rectangulo IFD: ergo rectangulum IFD, vnà cum quadrato FD, hoc * est rectangulum IDF æquale erit quadratis BC, CD, vnà cum duplo rectanguli BCD, hoc est * æquale erit quadrato BD, vel FG, addatur commune quadratum AF, rectangulum igitur IDF, vnà cum quadrato AF, hoc * est quadratum AD æquale erit quadratis AF, FG, hoc est quadrato AG, quare & recta AD æqualis erit rectæ AG: ablatis igitur æqualibus AF, AE, reliqua FD, hoc est BC reliquæ EG æqualis erit. Parallelogrammi igitur AFGH diameter AG excedit latus AF excessu EG æquali ipsi BC, excedit autem & alterum latus FG excessu æquali AB, ipsa enim AD, cui æqualis est diameter AG, excedit ipsam BD, hoc est latus FG excessu AB. Constructum est igitur parallelogrammum rectangulum AFGH, vt facere oportebat.

3. Secũdi. 4. Secũdi. 6. Secũdi.

CONSECTARIVM.

Itaque, recta cuius quadratum, duplum est rectanguli sub excessibus datis aucta excessu maiori, efficit latus maius parallelogrammi quæsiti, aucta verò minori excessu, latus minus efficit, aucta denique vtroque excessu efficit diametrum.

Recta enim DC aucta excessu CB æqualis est lateri FG, aucta verò vtroque excessu CB, BA, æqualis diametro GA, ac denique recta DC, hoc est FB aucta excessu BA, est ipsum latus FA.

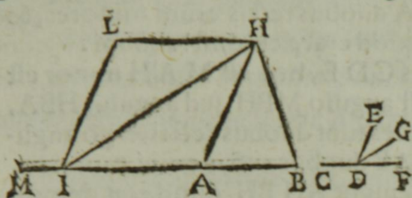
Sit minor excessus 2, maior 9, erit latus maius parallelogrãmi quæsiti 15, latus minus 8, diameter 17, duplum enim rectanguli sub excessibus 2, & 9, est 36, radix verò quadrata numeri 36, est 6, quæ aucta excessu 9, fit 15, pro latere maiori, aucta verò excessu 2, fit 8, pro latere minori, aucta denique vtroque excessu 2, & 9, fit 17, pro diametro.

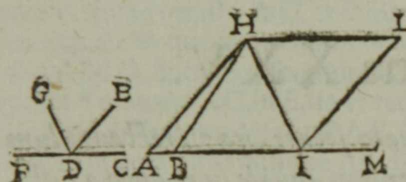
Problema XXIV.

DATO vno ex angulis rombi, & differentia inter eius latus, & diametrum, inuenire rombum.

Sit

Sit datus vnus ex angulis rombi, æqualis angulo CDE, differentia autem inter eius latus, & diametrum AB. Oportet inuenire rombum. Si angulus datus sit is quem diameter secat, reliquus è duobus rectis erit angulus quem diameter subtẽdit. Itaque dato vno dabitur alter. Sit igitur datus angulus CDE æqualis ei quem diameter subtendit, & producatur CD in F, & secetur bifariam angulus FDE recta linea DG, si igitur angulus CDE maior sit dimidio anguli CDG, producatur AB ad partes A, si verò sit minor, producatur ad partes B, æqualis autem dimidio nõ potest esse, quia nullus esset excessus inter latus rõbi, & diametrum, quod nõ ponitur. Producta igitur AB, vt dictum est in M, fiat dimidio anguli CDG, æqualis angulus MBH, & angulo CDE æqualis angulus MAH, & conueniant AH, BH, in H: conuenient enim, vt inferius demonstrabitur. Rursus





angulo MBH ęqualis constituatur angulus BHI, & compleatur parallelogrammum IAHL, cuius diameter IH. Quoniam igitur angulus MIH externus tranguli HIB, æqualis est duobus internis angulis IHB, IBH, quibus etiam æqualis est angulus CDG: vterque enim est eius dimidius ex constructione, erit angulus MIN angulo CDG æqualis, quare & angulus HIB angulo GDF Quoniam igitur angulus MIH ostensus est æqualis angulo CDG, & est quoque æqualis duobus internis angulis MAH, IHA, angulus CDG, hoc est duo anguli CDE, EDG duobus MAH, IHA erunt æquales, demptis æqualibus angulis CDE, MAH, reliquus EDG hoc est GDF reliquo IHA æqualis erit, sed ostensus est angulus GDF æqualis angulo HIB, hoc est HIA, ergo & angulus IHA angulo HIA, erit æqualis; quare & latus AH lateri AI, sed lateri AH æquale est IL, & lateri AI æquale HL, quia parallelogrammum est AILH, ergo latera AI, IL, LH, HA erunt inter se æqualia, parallelogrammum igitur AI, LH, rombus est, & angulus IAH quem subtendit diameter, æqualis est angulo CDE ex constructione. Et quoniam

anguli

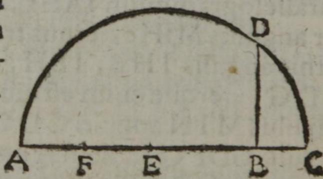
anguli HBI, BHI sunt æquales ex constructione, erunt & rectæ IH, IB æquales, sed IB differt ab IA per AB; ergo & IH differet ab ipsa IA per eandem AB. Constructus est igitur romb. IAHL, vt facere oportebat.

At verò rectas AH, BH conuenire sic demonstrabitur. Angulus C D E in prima figura, hoc est M A H maior est dimidio anguli C D G, hoc est angulo M B H, sed angulus M A H, vnà cum angulo H A B duobus rectis sunt æquales, ergo angulus H A B, vnà cum angulo H B A duobus rectis erunt minores, & ideo conuenient A H, B H, quod erat demonstrandum.

In secunda figura, angulus C D E, hoc est M A H minor est dimidio anguli CDG hoc est angulo MBH, sed angulus HBA, vnà cum angulo H B M æquales sunt duobus rectis, ergo angulus HBA, vnà cum angulo HAB duobus rectis erunt minores, quocunque igitur casu conueniunt AH, BH, quod erat demonstrandum.

Problema XXV.

DATAM rectam lineam secare, ita vt rectangulum sub partibus comprehensum æquale sit ei, quod à differentia partium fit quadrato.



Sit A B data recta linea secanda in duas partes, ita vt rectangulum sub partibus comprehensum, æquale sit quadrato differentiæ partium. Producatur A B in C, vt ipsa AB sit quintupla ipsius B C, & in A C describatur semicirculus A D C, & ex B educatur perpendicularis BD, cui æqualis ponatur B E, & secetur A E bifariam in F, differentia igitur partium A F, F B erit E B, & quoniam A B quintupla est ipsius BC, quintuplum rectanguli ABC, hoc est quintuplũ quadrati BD æquale erit quadrato AB, sed quadratum AB æquale* est quadrato E B, vnà cum quadruplo rectanguli E F B, hoc est A F B, ergo quintuplum quadrati B D, hoc est EB æquale erit quadrato E B, vna cum quadruplo rectanguli A F B: auferatur commune quadratum FB, quadruplum igitur rectanguli AFB quadruplo quadrati EB æquale erit, & consequenter simplum simplo,

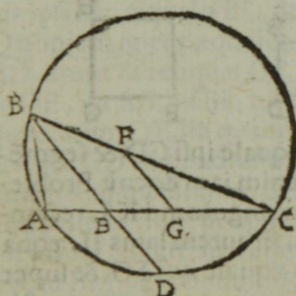
*8. Secũdi.

ſimplo. Secta eſt igitur A B in F, & ita vt rectangulum A F B ſub partibus æquale ſit quadrato E B, differentiæ videlicet partium A F, F B, quod erat faciendum.

Problema XXVI.

CIRCVLI portione data, inuenire punctum in eius circumferentia, à quo cum ducentur duæ rectæ lineæ, ad extrema baſis portionis puncta, rectangulum ſub ipſis comprehenſum æquale erit differentiæ ipſarum quadrato.

Sit data circuli portio ABC, cuius baſis AC. Oportet inuenire punctum in circumferentia A B C, à quo cum ducentur duæ lineæ rectæ ad puncta A, C, rectangulum ſub ipſis comprehenſum æquale ſit quadrato differentiæ ipſarum. Compleatur circulus ABCD, & circumferentia ADC ſecetur bifariam in D, & ſecetur * quoque AC, in E, ita vt rectangulum AEC, ſit æquale *Ex antec.* quadrato differentiæ ipſarum A E, E C, & iuncta D E producatur in B, & iungantur quoque AB, BC, & ſumantur B F, E G, æquales ipſis BA, AE, vtraque vtrique: differentia igitur rectarũ AB, B C, erit F C, ipſarum quoque AE, EC differentia erit GC. Et quoniam æquales ſunt anguli A B D, D B C æqualibus circumferentijs inſiſtentes, *erit A E ad E C, ſicut *3. Sexti.* AB, ad BC: ſed AE, AB ęquales ſunt ipſis EG, BF, vtraque vtrique ex cõſtructione, ergo vt E G, ad E C, ita erit B F, ad B C, & per conuerſionẽ rationis vt E G, ad GC, ita erit B F, ad FC, iuncta igitur FG, parallela * *2. Sexti.* erit ipſi BE. Et quoniam rectangulum AEC, hoc eſt GEC æquale eſt quadrato GC ex conſtructione, erit EG, ad GC, ſicut GC, ad EC, ſed oſtenſum eſt vt EG, ad GC, ita eſſe BF, ad FC, ergo vt BF, ad FC, ita erit GC, ad EC, ſed ratione parallelarum FG, BE, eſt vt GC, ad EC, ſicut FC, ad BC, ergo vt BF, hoc eſt BA, ad FC, ita erit FC, ad BC, rectangulum igitur ABC ſub extremis æquale erit quadrato mediæ F C. Inuentum eſt igitur punctum B in circumferentia, à quo cum ducentur duæ rectæ lineæ B A,



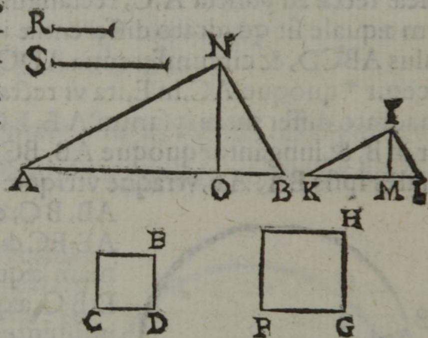
B C, ad extrema basis puncta A, C, rectangulum A B C, æquale erit quadrato F C, differentiæ videlicet ipsarum AB, BC, quod faciendum erat.

Problema XXVII.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum, quod tota, & altera parte continetur ad quadtatum partis reliquæ, datam habeat rationem.

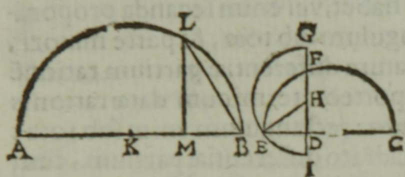
Euclides Propositione vndecima libri secundi, Elementorũ docet lineam rectam secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte sit æquale quadrato partis reliquæ, at verò vt habeat eam quæ ponitur rationem, sic erit secanda.

Sit data recta linea A B, quã oportet secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte ad quadratum partis reliquæ rationẽ habeat vt R, ad S. Exponatur aliquod quadratum CDE, & fiat vt R, ad S, ita quadratum C D E ad quadratum FGH: deinde inueniatur triangulum rectangulum habens vnum ex lateribus angulum rectum ambientibus, æquale ipsi CD, & segmẽtum basis alternum æquale ipsi FG, id enim iam docuit Problema decimum nonum. Sit igitur illud triangulum I K L rectangulum in I, in quo perpendicularis IM, sit autem latus IL æquale ipsi CD, segmentum KM alternum æquale ipsi FG, & super datam AB, triangulo I K L simile similiterque positum constituatur triãgulum NAB, à cuius angulo recto ANB demittatur perpendicularis N O. Quoniam igitur similia sunt triangula NAB, IkL similiterque posita, erit angulus A æqualis angulo k, & angulus B æqualis angulo L, & anguli ad O, & M sunt recti, & ideo æquales: erit triangulũ NOA simile triangulo IMK, & triangulum NOB simile triangulo I M L, & ob id vt NB, ad NO, ita erit IL, ad IM, & vt NO, ad OA, ita IM, ad MK, quare ex æquali vt NB, ad AO, ita erit IL, ad MK.



Et

Et quoniam eſt vt CD, ad IL, ita FG, ad kM, æqualis videlicet ad æqualem, erit permutando vt CD, ad FG, ita IL, ad KM, ſed & NB, ad AO, eſt ſicut IL, ad Mk, vt eſt demonſtratum: ergo vt CD, ad FG, ita erit NB, ad AO, & conſequenter vt quadratum CD, ad quadratum FG, ita quadratum NB, ad quadratum AO, ſed quadratum NB * æquale eſt rectangulo ABO: eſt enim * NB media proportionalis inter AB, BO, ergo vt quadratum CD ad quadratum FG, hoc eſt vt R, ad S, ita erit rectangulum ABO, ad quadratum AO, ſecta eſt igitur AB, in O, vt facere oportebat. *17. Sexti. Ex coroll. prop 8. Sexti.*



ALITER quoq; hoc Problema abſoluemus.

Sit AB data recta linea ſecanda: ratio autem rectãguli ſub tota, & altera parte ad quadratum partis reliquæ ſit vt ED, ad DC. Ponantur in directũ ED, DC, & in EC deſcribatur ſemicirculus EFC, ipſiq; EC ducatur perpendicularis DF, & ſecetur FD bifariam in H, & iungatur EH, & centro H, interuallo HE deſcribatur circulus, ſecans FD productam in punctis G, I, & fiat vt GD, ad DE, ita AB, ad Bk: deſcribatur autem in AB ſemicirculus ALB, in quo accommodetur ipſi Bk, æqualis BL, & demittatẽ ad AB perpẽdicularis LM. Quoniam igitur æquales ſunt GH, HI, & æquales quoque FH, HD, erunt & reliquæ GF, DI æquales. Et quoniam eſt vt GD, ad DE, ita AB, ad Bk, hoc eſt ad BL: erit vt quadratum GD, ad quadratum DE, ita quadratum AB, ad quadratum BL, ſed quadratum GD ad quadratum DE, eſt ſicut GD, ad DI, & quadratum AB ad quadratum BL, ſicut AB, ad BM, eſt enim * quadratum primæ trium proportionalium ad quadratum ſecundæ, ſicut prima ad tertiam, ergo vt GD, ad DI, hoc eſt ad FG, ita erit AB, ad BM, per conuerſionem rationis, vt GD, ad FD, ita AB ad AM, & permutando vt GD, ad AB, ita erit FD, ad AM. *Ex coroll. prop. 20. 6.*

Rurſus quoniam eſt vt GD ad DE, ita AB ad BL, erit permutando vt GD ad AB, ita DE ad BL, ſed oſtẽſum eſt vt GD ad AB, ita eſſe FD ad AM, ergo vt DE ad BL, ita erit FD ad AM, & permutando, vt DE ad FD, ita BL ad AM, & vt quadratum DE ad quadratum FD, ita quadratum BL ad AM, quadratum, ſed quadratum BL * æquatur rectangulo ABM, eſt * enim BL media proportionalis inter AB & BM, vt igitur quadratũ DE ad qua- *17. Sexti. Coro. pro. 8. Sexti.*

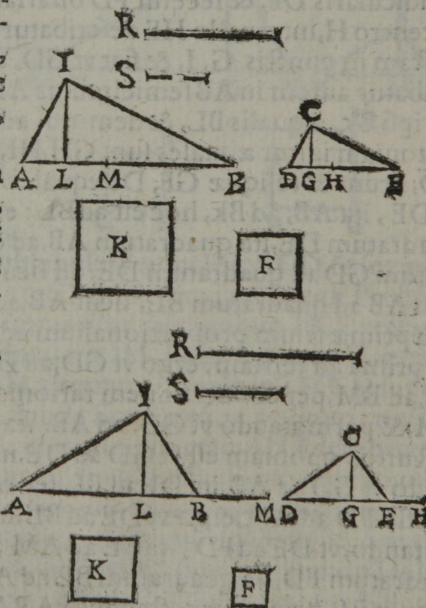
dratum FD, hoc est vt ED ad DC: prima nempe ad tertiã trium proportionalium, ita erit rectangulum ABM ad quadratũ. AM Secta est igitur AB data in M, vt secanda proponebatur.

Problema XXVIII.

DATAM rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat datam.

Hoc Problema duos casus habet, vel enim secanda proponitur data recta linea, vt rectangulum sub tota, & parte maiori, vel & parte minori ad quadratum differentiæ partium rationẽ habeat datam: primo casu oportebit terminum datæ rationis primum, maiorem esse secundo: rectangulum enim sub tota, & parte maiori, maius est quadrato differentiæ partium, cum vtraque, tota videlicet, & pars maior: maiores sint quam partium differentia.

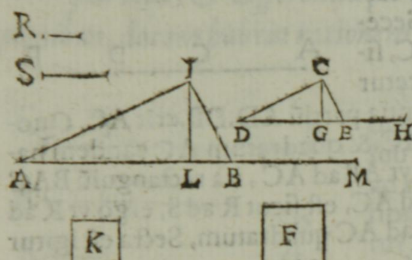
Secundus casus nulla indiget determinatione, rectangulum enim sub tota, & parte minori potest esse maius prædicto quadrato, & minus.



Sit igitũ data recta linea AB secãda in duas partes, vt rectangulum sub tota, & altera parte ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat vt R, ad S. Exponatur aliquod quadratum k, & fiat vt R ad S, ita K quadratum, ad aliud quadratum quod sit F latus: autẽ quadrati k intelligatur vnum ex lateribus triãguli angulum rectum ambiẽtibus, maius videlicet in prima figura, quæ ad primum casum pertinet, minus in secunda, & tertia, quæ pertinẽt

ad

ad ſecundum caſum, latus verò quadrati F intelligatur differẽtia ſegmentorum baſis. Itaque dato vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, & differentia ſegmentorum baſis, inueniatur triangulum, id enim iam docuit Problema decimumoctauum. Sit igitur illud triangulũ CDE, in quo perpẽdicularis CG ab angulo recto demiſſa ſecet baſim in duo ſegmenta DG, GE, quorum differentia EH ſit æqualis lateri quadrati F, & latus CE æquale lateri quadrati K: denique deſcribatur in AB triangulum IAB triangulo CDE ſimile ſimiliterque poſitum, à cuius angulo recto demiſſa in baſim perpendicularis IL ſecet eam in duo ſegmenta AL, LB, quorũ differentia ſit MB. Quoniam igitur ſimilia ſunt triãgula IAB, CDE, erit angulus A æqualis angulo D, & angulus IBL æqualis angulo CEG, atque anguli ad L, & G, ſunt recti, & ideo æquales, ergo triangulum ILB ſimile erit triangulo CGE, & triãgulum ILA triangulo CGD, & propter ſimilitudinem erit vt BL ad LI, ita EG ad GC, & vt LI ad LA, ita GC ad GD, ergo ex æquali erit vt BL ad LA: hoc eſt ad LM, ita EG ad GD, ideſt ad GH, & per conuerſionem rationis vt BL ad BM, ita erit EG ad EH.



Et quoniam propter triangulorum ſimilitudinem eſt vt IB ad BL, ita CE ad EG, & vt BL ad BM, ita EG ad EH, vt eſt demõſtratum, erit ex æquali vt IB ad BM, ita CE ad EH: hoc eſt ita latus quadrati k ad quadrati F latus, vt igitur quadratum IB ad quadratum MB, ita erit K quadratum ad F quadratum, ſed K quadratum ad F quadratum eſt, vt R ad S: ergo vt R ad S, ita erit quadratum IB ad MB, quadratum, ſed quadratum IB * æquale eſt rectangulo ABL, eſt enim IB * media proportionalis inter AB, LB, ergo vt R ad S, ita erit rectangulũ ABL ad quadratum MB. Secta eſt igitur AB in L, vt facere oportebat. *17. 6.* *Ex coroll. 8. 6.*

Problema XXIX.

DATAM rectam lineam, ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & differentia partium ad quadratum differentiæ,

rentiæ, rationem habeat datam. Oportet autem datæ rationis terminum primum maiorem esse secundo: rectãgulum enim sub tota, & differentia partium maius est quadrato prædictæ differentiæ.

Sit AB data recta linea secãda, ita vt rectãgulum sub ipsa AB, & differentia partium ad quadratũ ipsius differentiæ, rationem habeat vt R ad S, cuius rationis terminus R sit maior quam S. Seceтur * AB in C, vt sit AB ad AC, sicut R ad S, ipsa verò CB secetur bifariam in D, itaque differentia partiũ AD, DB, erit AC. Quoniam igitur rectangulum BAC, & quadratum AC eandem habent altitudinem AC, erit * vt AB ad AC, ita rectangulũ BAC ad AC quadratum, sed AB ad AC, est sicut R ad S, ergo vt R ad S, ita erit rectangulum BAC ad AC quadratum, Secta est igitur AB in D, vt facere oportebat.

10. Sexti.

1. Sexti.

R

S

A C D B

Problema XXX.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium, ad quadratum totius, rationem habeat datam. Oportet autem datam rationem esse minoris ad maius: rectangulum enim sub tota, & differentia partium minus est totius lineæ quadrato.

Sit data recta linea A B quã oportet secare, vt rectãgulum sub tota, & differẽtia partium ad quadratum totius AB rationẽ habeat vt R ad S, cuius rationis terminus R sit minor quam S. Fiat vt S ad R, ita AB ad AC, & secetur CB bifariam in D. Quoniam igitur vt S ad R, ita est AB ad A C, erit conuertendo vt R ad S, ita AC ad AB, sed vt AC ad AB, ita est rectangulum B A C ad quadratum

R

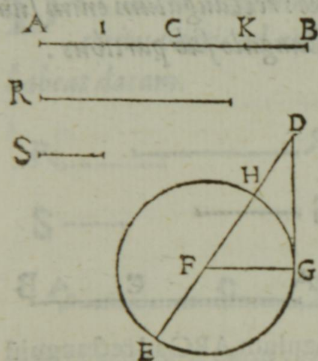
S

A C D B

AB, eandem enim habent altitudinem AB, vt igitur R ad S, ita erit rectangulum BAC ad AB quadratum: est autem rectangulum B A C illud quod tota A B, & differentia partium A D, DB continetur, quia ipsarum partium differentia est AC, sunt enim CD, DB æquales. Secta est igitur AB in D, vt facere oportebat.

Problema XXXI.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium ad rectangulum sub partibus, datam habeat rationem.



Sit data linea recta A B quam oportet secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium ad rectangulum sub partibus rationem habeat vt R ad S. Secetur A B bifariam in C, & fiat vt R ad S, ita AB ad aliam quæ sit FG: ipsi autem FG ducatur perpendicularis G D, ipsi verò A C æqualis, & conectatur FD, & cẽtro F, interuallo FG describatur circulus, quem secet DF continuata in punctis E, H, & ponantur ipsi H D æquales CK, CI. Quoniã igitur ęquales sunt AC, CB, & æquales quoque IC, Ck, fiunt æquales & reliquæ AI, kB, & ideo differentia inter A k, K B erit Ik. Et quoniam AB secta est in partes æquales in C, & inæquales in k, rectangulum AkB vnà cum quadrato CK æquale * erit quadrato AC: hoc est DG, seu quod idem est rectangulo EDH, recta enim DG tangit circulum in G, sed rectangulũ EDH æquale * est rectangulo EHD vnà cum quadrato HD, ergo rectangulum AKB, vnà cum quadrato Ck æquale erit rectãgulo EHD, vna cum quadrato HD: auferantur æqualia quadrata C K, HD, reliquum igitur rectangulum AkB reliquo rectangulo EHD æquale erit.

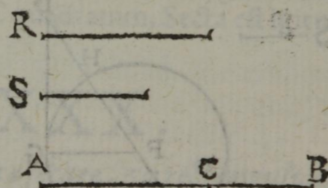
5. Secũdi. 3. Secũdi.

Et quoniam est vt R ad S, ita AB ad FG, hoc est ad FH, vt autem AB ad FH, ita rectangulum AB, CK ad rectangulum FHD: æquales enim habent altitudines Ck, HD, erit vt R ad S, ita rectangulum

ctangulum AB, Ck ad rectangulum FHD, & consequenter ita duplum rectanguli AB, Ck ad duplum rectanguli FHD, hoc est ita rectangulum AB, Ik ad rectangulum EHD, sed rectangulũ EHD ostensum est æquale rectangulo AkB, ergo vt R ad S, ita erit rectangulum AB, Ik ad rectangulum AKB. Secta est igitur AB in k, vt facere oportebat.

Problema XXXII.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte ad rectangulum sub partibus, rationem habeat datam. Oportet autem datæ rationis terminum primum maiorem esse secundo: rectaugulum enim sub tota, & altera parte maius est rectangulo sub partibus.



Sit data recta linea AB secãda in duas partes, vt rectangulũ sub tota, & vna parte ad rectãgulum sub partibus, rationem habeat vt R ad S, cuius rationis terminus R sit maior quã S. Secetur * AB in C, vt sit AB ad AC, sicut R ad S, ergo factum erit quod proponitur: est enim vt AB ad AC, ita rectangulum ABC ad rectangulũ ACB propter eandem altitudinem CB, sed AB ad AC est sicut R ad S, ex cõstructione, ergo vt R ad S, ita erit rectangulũ ABC ad ACB rectangulũ. Secta est igitur AB in C, vt faciendum erat.

* 10. Sexti.

Problema XXXIII.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub tota, & vna parte ad rectangulum sub tota, & altera parte, rationem habeat datam.

Sit AB data recta linea secanda in duas partes, ita vt rectãgulum sub tota, & vnà parte ad rectangulũ sub tota, & altera parte rationem habeat vt R ad S. Hoc autem nihil aliud est nisi ipsam AB secare in duas partes, ita vt partium ratio sit eadẽ quæ

R ad S,

R ad S, secetur * enim in C, vt sit AC ad CB, sicut R ad S. Quoniã igitur rectangula BAC, ABC eandem habent altitudinem AB, erit vt AC ad CB, ita rectãgulum BAC ad rectangulũ ABC, sed AC ad CB, est sicut R ad S, ex constructione; ergo vt R ad S, ita erit rectangulum BAC ad ABC, rectangulum. Punctum igitur C Problema efficit, quare factum est quod oportebat. *10. Sexti.

R

S

A C B

Problema XXXIV.

DATAM rectam lineam ita secare, vt quadratum alterius partis ad rectangulum sub partibus, rationem habeat datam.

Sit AB secanda in duas partes, ita vt quadratũ alterius partis, ad rectãgulum sub partib. rationem habeat vt R ad S. Constructio huius problematis eadem est q̃ precedẽtis: si enim AB secetur in C, ita vt A C ad C B, rationẽ habeat vt R ad S, punctum C problemati satisfaciet: erit enim vt AC ad CB, ita quadratũ AC ad rectangulum ACB propter eandem altitudinem AC, sed AC ad CB, est sicut R ad S, ex constructione, ergo vt R ad S, ita erit quadratum A C ad rectangulum A C B, punctum igitur C problemati satisfacit, quare factum est quod oportebat.

R

S

A C B

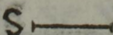
Problema XXXV.

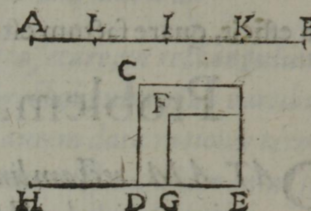
DATAM rectam lineam ita secare, vt quadratum alterius partis ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat datam.

Hoc Problema duos casus habet: vel enim datam rectam lineam secare oportet, vt quadratũ partis maioris, vel partis minoris ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat da-

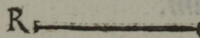
tam: primo casu oportebit datam rationẽ, esse maioris nempe ad minus: pars enim maior, maior est quam partiũ differentia. Secundus casus non indiget determinatione, pars enim minor potest esse maior prædicta differentia, & etiam minor.

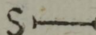


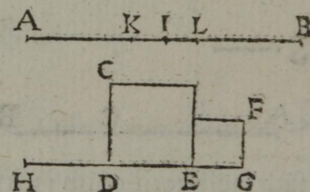


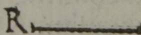


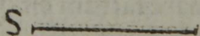
Sit igitur data recta linea A B quã oportet ita secare, vt quadratũ alterius partis, ad quadratum differentiæ partium rationẽ habeat vt R ad S. Exponat aliquod quadratum CDE, & fiat vt R ad S, ita quadratũ CDE, ad aliud quadratum quod sit F G E, & ED duplicetur in H, ipsa autẽ A B secetur bifariã in I, & fiat vt HG ad GE, ita AI ad IK: ergo in prima figura quæ ad primum casum pertinet, erit componendo, in secũda verò & tertia, quæ pertinent ad secundum casum, erit diuidẽdo, vt HE ad GE, ita Ak ad Ik, & duplatis consequentib. vt HE ad duplã GE, seu quod idem est vt DE, quæ est dimidia ipsius HE ad GE simplã, est.n. eadẽratio totius ad totum quæ dimidij ad dimidiũ, ita erit Ak ad duplam IK quæ sit LK: quare vt quadratum DE ad quadratum G E, ita erit quadratum Ak ad Lk quadratũ, sed quadratum DE ad quadratũ GE, est sicut R ad S, ex cõstructione, ergo vt R ad S, ita erit quadratum AK ad quadratum Lk, differẽtię videlicet partium A k, k B, cum enim A I, I B sint æquales, & æquales quoque L I, I K, fiunt & AL, KB æquales, & ideo differẽtia inter AK, KB, est Lk. Secta est igitur AB in k, & impleta Problematis conditio.

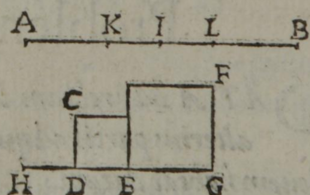








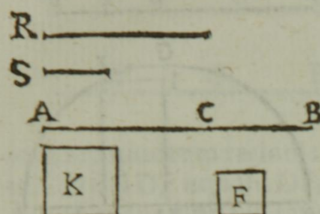




Problema

Problema XXXVI.

DATAM rectam lineam ita secare, vt partium quadrata datam teneant rationem.



Sit data recta linea A B secãda in duas partes, ita vt partium quadrata rationẽ teneant vt R ad S. Exponatur aliquod quadratũ k, & fiat vt R ad S, ita k quadratum ad aliud quadratũ quod sit F. Deinde secet AB in C, vt sit A C ad CB, sicut latus quadrati k ad quadrati F latus. Quoniam igitur est vt AC ad CB, ita latus quadrati K ad quadrati F latus, erit vt quadratum AC ad quadratũ CB, ita k quadratum ad F quadratũ, sed k quadratum ad F quadratum, est sicut R ad S, ex constructione, ergo vt R ad S, ita erit quadratum AC ad CB quadratum. Secta est igitur AB in C, vt facere oportebat.

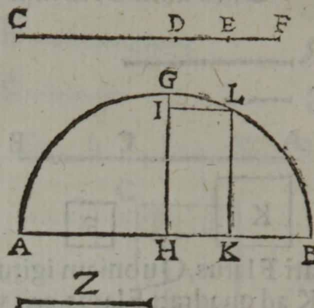
Problema XXXVII.

DATAM rectam lineam ita secare, vt partium quadrata simul sumpta ad rectangulum sub partibus, rationem habeant datam. Oportet autem datæ rationis terminum primum non esse minorem duplo secundi: minimũ enim aggregatum quadratorum duplum est rectãguli sub partib. maximi, hoc aũt accidit quando data linea secta est bifariã.

Sit data recta linea AB quam oportet, ita secare, vt partium quadrata simul sumpta ad rectangulum sub partibus rationem habeant vt CD ad DE, cuius rationis terminus CD non sit minor duplo ipsius DE. Secetur AB bifariã in H, & in ea describatur semicirculus AGB, ipsiq; AB ducatur perpendicularis HG, & DE duplicetur in F, & fiat vt CF ad EF, ita quadratum AB ad aliud quadratum cuius latus sit Z: quadratum igitur AB nõ erit minus quadruplo, quadrati Z, quia & CF non est minor quam EF quadrupla, ergo ipsa AB non erit minor duplo lateris Z, & consequenter HG, dimidia videlicet ipsius AB non minor q̃ Z.

Sumatur ergo in HG ipsi Z, æqualis HI, & per I agatur ipsi AB parallela IL, & ad AB demittatur perpendicularis Lk, erit igitur Lk æqualis IH, hoc est ipsi Z. Et Quoniam est vt CF ad EF, ita quadratum AB ad quadratum Z, hoc est ad quadratum L k: seu quod idem est ad rectangulũ AKB, duplatis cõsequentib. erit vt CF ad DF, ita quadratum AB, hoc est * aggregatum quadratorum A k, KB vnà cum duplo rectanguli AkB ad duplum rectanguli A K B, & diuidendo erit vt CD ad DF, ita aggregatum quadratorum Ak, KB ad duplum rectanguli AKB, & subduplatis cõsequentib. erit vt CD ad DE, ita aggregatum quadratorũ AK, kB ad rectãgulũ AkB. Secta est igitur AB in K, vt facere oportebat.

4. Secũdi.

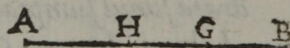


L E M M A.

R*Ectangulum sub aggregato, & differentia duorum laterum æquale est excessui quadratorum à lateribus.*

Sint duo latera, A G maius, G B minus, ipsi autẽ GB ponatur æqualis GH, differẽtia igitur laterũ AG, GB erit AH. Dico rectãgulũ BAH æquale esse excessui quadratorum AG, GB. Quoniam enim HB secta est bifariam in G, & ei adiecta HA, rectangulũ BAH, vnà cum quadrato GB * æquale erit quadrato AG, auferatur vtrinque quadratum GB, reliquum igitur rectangulum B A H æquale erit excessui quadratorum AG, GB, quod erat demonstrandum.

6. Secũdi.

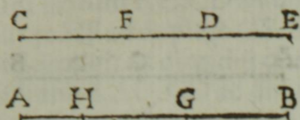


Problema XXXVIII.

D*ATAM rectam lineam ita secare, vt partium quadrata simul sumpta ad rectangulum sub tota, & differentia partium, rationem habeant datam. Oportet autem datam rationem esse maioris ad minus: quadrata enim partium*

simul

ſimul ſumpta maiora ſunt rectangulo ſub tota, & differentia partium, quandoquidem illud rectangulum ex anteced. Lem. æquale eſt exceſſui quadratorum.



Sit igitur data recta linea AB quã oportet ſecare in duas partes, vt partium quadrata ſimul ſumpta ad rectangulum ſub tota, & differentia partium rationem habeãt vt CD ad DE, quorum terminorum rationis CD ſit maior quam DE. Sumatur in CD ipſi DE æqualis DF, & * ſecetur AB in G, vt quadratum AG ad quadratum GB rationem habeat eandẽ, quam habet CE ad CF, ipſi autem GB ponatur æqualis GH, erit igitur per conuerſionem rationis, vt quadratum AG ad exceſſum quadratorum AG, GB, hoc eſt ad * rectangulum BAH, ita CE ad FE, & duplatis antecedentibus, vt duplum quadrati AG, hoc eſt * vt aggregatum quadratorum AG, GB, vnà cum rectangulo BAH, ad rectangulum BAH, ita erit dupla CE ad FE, hoc eſt ad duplã DE, & ideo ita CE ſimpla ad ſimplam DE: eſt enim eadem ratio dupli ad duplum quæ ſimpli ad ſimplũ, ergo diuidendo erit aggregatum quadratorum AG, GB ad rectangulum BAH, ſicut CD ad DE, Secta eſt igitur AB in duas partes AG, GB quarum partium quadrata ſimul ſumpta ad rectangulum ſub tota AB, & differentia partium AG, GB, rationem habent vt CD ad DE, quod facere oportebat. *35. Huius.* *Ex antec. Lem.* *

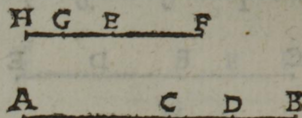
At verò duplum quadrati AG çquale eſſe aggregato quadratorum AG, GB, vnà cum rectangulo BAH, ſic demonſtrabitur. Quoniam enim quadratum AG æquale * eſt rectangulo BAH, vnà cum quadrato GB, addito communi quadrato AG, duplũ quadrati AG æquale erit aggregato quadratorum AG, GB, vnà cum ſectangulo BAH, quod erat demonſtrandum. * *6. Secũdi.*

Problema XXXIX.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta ad totius lineæ quadratum, rationem habeant datam. Oportet autem datæ rationis terminum ſecundum, maiorem eſſe primo, non autem duplo primi: quadratum

dratum enim totius lineæ maius est quadratis partium, duplo autem ipsorum quadratorum non est maius.

Sit AB data recta linea secãda in duas partes, vt partiũ quadrata simul sumpta, ad quadratum totius AB rationẽ habeant vt EF ad FG, cuius rationis terminus FG sit maior quam EF, non autem quam duplum ipsius EF. Duplicetur FE in H, & secetur AB bifariam in C, & fiat vt FG ad GH, ita quadratum AC ad quadratum CD, ergo conuertendo erit vt HG ad GF, ita quadratum CD ad AC quadratum, & componendo vt HF ad GF, ita aggregatum quadratorum AC, CD ad AC quadratum, & duplatis consequentib. vt HF ad GF duplã, hoc est vt EF ad GF, (est enim eadẽ ratio dimidij ad dimidium quæ totius ad totũ,) ita erit aggregatum quadratorum AC, CD ad duplum quadrati AC, & ita duplum quadratorum AC, CD ad quadruplũ quadrati AC, hoc est ad quadratum AB, sed duplum quadratorum AC, CD æquale * est quadratis AD, DB, vt igitur EF ad FG, ita erit aggregatum quadratorum AD, DB ad AB, quadratũ. Secta est igitur AB in duas partes AD, DB, quarum quadrata simul sumpta ad quadratum totius AB, rationẽ habent vt EF ad FG, quod erat faciendum.



9. Secũdi.

Problema XL.

DATAM rectam lineam ita secare, vt partium quadrata simul sumpta, ad quadratum differentiæ partiũ datam habeant rationem. Oportet autem datam rationem esse maioris ad minus.

Sit data recta linea AB secanda in duas partes, vt partiũ quadrata simul sumpta ad quadratũ differẽtiæ partium rationem habeant vt EF ad FG, quæ ratio sit maioris ad minus. Duplicetur FE in H, & AB secetur bifariã in C, & fiat vt HG ad GF, ita quadratum AC ad quadratũ CD, ipsi aũt CD ponatur æqualis CI.

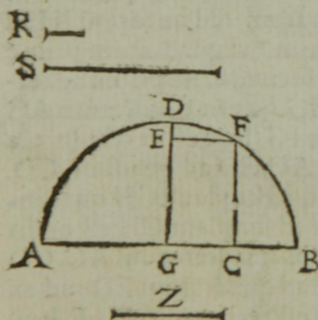


Quoniam

Quoniam igitur AC, CB ſunt æquales, & æquales quoque IC, CD, fiunt & reliquæ AI, DB æquales, quare differentia partium AD, DB erit ID: Et qm̄ eſt vt HG ad GF, ita quadratum AC ad CD quadratum, erit componendo vt HF ad GF, ita aggregatū quadratorum AC, CD ad quadratū CD, & duplatis conſequẽtibus vt HF ad duplam GF, hoc eſt vt EF ad GF, (eſt enim eadẽ ratio dimidij ad dimidiū quæ totius ad totū) ita erit aggregatū quadratorū AC, CD ad duplum quadrati CD, & ita duplū quadratorū AC, CD ad quadruplū quadrati CD, hoc eſt ad quadratū ID, ſed duplū quadratorū AC, CD ęquale* eſt quadratis AD, DB, vt igitur EF ad FG, ita erit aggregatū quadratorū AD, DB ad quadratum ID. Secta eſt igitur AB in D, vt facere oportebat. 9 Secũdi.

Problema XLI.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum totius lineæ, datã habeat rationem. Oportet autem datæ rationis, terminum ſecundum non eſſe minorem quadruplo primi: quadratum enim totius lineæ quadruplum eſt rectanguli ſub partibus maximi, hoc autem accidit quando linea data ſecta eſt bifariam.



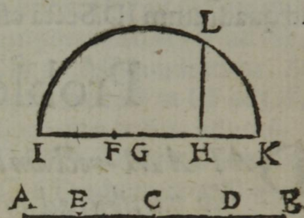
Sit igitur AB data recta linea ſecanda in duas partes, vt rectangulū ſub partib. ad quadratū totius AB rationẽ habeat vt R ad S, cuius rationis terminus S, non ſit minor quadruplo ipſius R. Secetur AB bifariã in G, & in ea deſcribatẽ ſemicirculus ADB, à pũcto aũt G ducatur ipſi AB perpendicularis GD, & fiat vt S ad R, ita quadratum AB ad aliud quadratum cuius latus ſit Z. Qm̄ igitur S nõ eſt minor quadruplo ipſius R, quadratū AB non erit minus quadruplo quadrati Z, neque ideo recta AB minor, erit duplo lateris Z, nec denique GD, hoc eſt dimidia AB minor erit q̃ Z, ſumatẽ ergo in GD ipſi Z ęqualis GE, & ipſis AB, DG parallelæ agantur EF, FC, erit igitur FC, æqualis EG, hoc eſt ipſi Z. Et quoniam eſt vt S ad R, ita

quadratum

quadratum AB ad quadratum Z, hoc est ad FC quadratum, seu quod idem est ad rectangulũ ACB, erit conuertendo vt R ad S, ita rectangulum ACB ad AB quadratum. Secta est igitur AB in G, vt facere oportebat.

Problema XLII.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus ad quadratum differentiæ partium, datam habeat rationem.



Sit data recta linea A B secanda in duas partes, vt rectangulum sub partib. ad quadratũ differentiæ partium rationẽ habeat vt FG ad GH. Secetur AB bifariam in C, & dupli cetur GH in K, ipsa verò GF quadruplicetur in I, & in Ik describat semicirculus ILk, à puncto aũt H excitet ad IK perpendicularis HL, & fiat vt IH ad HL, ita AC ad CD, ipsiq; CD ponatur æqualis CE. Quoniam igitur æquales sunt AC, CB, & æquales quoque EC, CD, fiunt & reliquæ AE, DB æquales, quare differentia ipsarum AD, DB erit ED. Et qm̃ est vt IH ad HL, ita AC ad CD, erit vt quadratum IH ad quadratum HL, ita quadratum AC ad CD quadratum, sed quadratũ IH ad quadratum HL, est vt IH ad Hk: est enim * vt quadratum primę trium proportionalium ad quadratũ secundæ, ita prima ad tertiam, vt igitur IH ad HK, hoc est ad HG, ita erit quadratum AC ad quadratum CD, & diuidẽdo erit vt IG, hoc est vt quadrupla FG ad GH, ita excessus quadratorum AC, CD ad quadratũ CD, & quadruplatis consequentib. vt FG quadrupla ad GH quadruplam, seu quod idem est vt FG simpla ad simplam GH: est enim eadem ratio vtrobique, ita erit excessus quadratorum AC, CD ad quadruplum quadrati CD, hoc est ad quadratum ED, sed excessus quadratorum AC, CD æqualis est rectangulo DAE, hoc est A D B ex Lemmate in Prob. 37, ergo vt FG ad GH, ita erit rectangulum ADB ad quadratũ ED. Secta est igitur AB in duas partes AD, DB sub quibus rectangulum ADB ad qnadratũ differentiæ ipsarum rationem habet vt F G ad GH, quod erat faciendum.

Coroll. 2. 20. Sexti.

F I N I S.

951